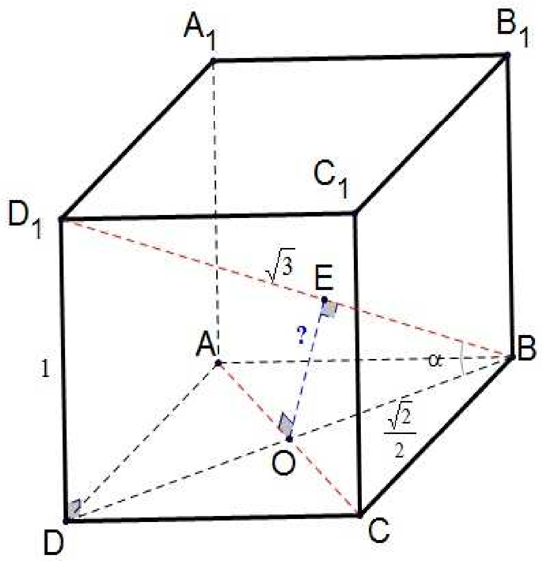
C2. Ребро куба ABCD равно 1. Найдите расстояние между прямыми AC и BD1.



$$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$OE=OB\cdot\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{6}}$$

$A(0;0;0)$
$C(1;1;0)$
$B(0;1;0)$
$D_1(1;0;1)$
$\overrightarrow{AC}(1;1;0)$
$\overrightarrow{BD_1}(1;-1;1)$
$\overrightarrow{AB}(0;1;0)$

$$\Delta=\begin{vmatrix}0&1&0\\1&1&0\\1&-1&1\end{vmatrix}=0\cdot\begin{vmatrix}1&0\\-1&1\end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}+0\cdot\begin{vmatrix}1&1\\1&-1\end{vmatrix}=0-1+0=-1$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}1&1\\1&-1\end{vmatrix}=-2$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1&0\\-1&1\end{vmatrix}=1$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}=1$$

$$\rho(AC,BD_1)=\frac{|\Delta|}{\sqrt{\Delta_1^2+\Delta_2^2+\Delta_3^2}}=\frac{|-1|}{\sqrt{(-2)^2+1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{6}}$$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{6}}$

C2, вариант 7. Решение методом координат и без определителей третьего порядка.
Будем исходить из того, чтобы найти расстояние между скрещивающимися прямыми AC и BD_1 необходимо:
1. Найти уравнение плоскости, которая проходит через прямую BD_1 параллельно AC. (При этом можно обойтись без определителей третьего порядка. Т.е. будем искать уравнение плоскости, проходящей через данные три точки, не лежащие на одной прямой).
2. Вычислить расстояние от любой точки прямой AC до этой плоскости. (Л.С.Атанасян и др., Геометрия, 10-11, Просвещение, 2011, с.116 последнее уравнение в п. 53*).

Чертеж (рисунок) опускаю. При выполнении рис. за начало координат возьму точку В.Ось х направлю по BA, ось у - по BC, ось z - по BB_1.
Искомая плоскость пройдет через точки B, D_1, P и K, где P и K- середины ребер CC_1 и AA_1 соответственно.

Эта плоскость, действительно, параллельна прямой AC, поскольку $PK \| AC$, .

При выбранной системе координат будем иметь: $B(0;0;0), D_1(1;1;1), K\left(1;0;\frac{1}{2}\right), A(1;0;0).$
Уравнение плоскости, проходящей через точки B, D_1, K, будет иметь вид: $ax+by+cz+d=0$

Коэффициенты a,b,c,d будем искать известным методом - методом неопределенных коэффициентов, подставляя координаты этих точек в общий вид уравнения искомой плоскости.
Поскольку при подстановке координат точки B значение d уже определится, и он окажется равным нулю, то придется взять произвольным, но не равным нулю, **какой-либо другой коэффициент** . Таким коэффициентом я назначаю c! И пусть он будет равен 2. Почему именно 2? А не 3 и не 5 - заметите ниже при решении системы.
Составим и решим названную систему.

$$\begin{cases} d=0 \\ c=2 \\ a+b+c=0. \\ a+\frac{1}{2}c=0 \end{cases}$$

Окажется что: $a=-1, b=-1, c=2, d=0$. Итак, уравнение плоскости имеет вид: $-x-y+2z=0$ или же $x+y-2z=0.$ И это - то, что нам надо!

Расстояние от точки до плоскости вычисляется по формуле: $l=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$, где x_0, y_0, x_0 - координаты точки.
Выше было уже сказано, что такую точку можно выбрать на прямой AC произвольным образом. Пусть это - точка $C(0;1;0)$. Будем иметь: $l=\frac{|1 \cdot 0+1 \cdot 1-2 \cdot 0+0|}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}}=\frac{1}{\sqrt{6}}.$
Вместо точки C можете взять точку A. Ничего не изменится. И всё!