Критерии проверки заданий С1–С6

С1. Обоснованно получен верный ответ – 2 балла;
В верном рассуждении допущена вычислительная ошибка, которая, возможно, привела к неверному ответу – 1 балл.
В остальных случаях – 0 баллов.

С2. Обоснованно получен верный ответ – 3 балла.
Ответ верен, но в решении содержатся незначительные ошибки или пробелы – 2 балла.
Ответ верен, но решение содержит значительные ошибки или отсутствует вовсе – 1 балл.
В остальных случаях – 0 баллов.

С3. Обоснованно получен верный ответ – 2 балла;
В верном рассуждении допущена вычислительная ошибка, которая, возможно, привела к неверному ответу – 1 балл.
В остальных случаях – 0 баллов.

С4. Обоснованно получен верный ответ – 3 балла.
Верно рассмотрен только один случай расположения или рассмотрены оба случая, но с арифметическими ошибками – 2 балла.
Рассмотрен только один случай расположения, но с арифметическими ошибками – 1 балл.
В остальных случаях – 0 баллов.

С5. Обоснованно получен верный ответ – 4 балла.
Ответ верен, но в решении содержатся незначительные ошибки или пробелы – 3 балла.
Ответ неточен (содержит лишние значения или не содержит часть верных), но рассуждения правильны – 2 балла.
Ответ неверен, но в решении имеются элементы правильного рассуждения – 1 балл.
В остальных случаях – 0 баллов.

С6. Обоснованно получен верный ответ – 4 балла.
Ответ верен, но в решении содержатся незначительные ошибки или пробелы – 3 балла.
Ответ верен, но в решении верно произведено только одно из двух необходимых действий (либо отброшены все маленькие значения n, либо произведен отбор из больших) – 2 балла.
Ответ, возможно, неверен, но в решении имеются элементы правильного рассуждения – 1 балл.
В остальных случаях – 0 баллов.

Решения и ответы к заданиям С1–С6

Варианты 1, 5, 9, 13

С1. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2\sin^2 x - 7\sin x + 3 = 0, \\ 6\sin x + 5y = 13. \end{cases}$

Решение. Из первого уравнения: $\sin x = 3$ или $\sin x = \frac{1}{2}$.

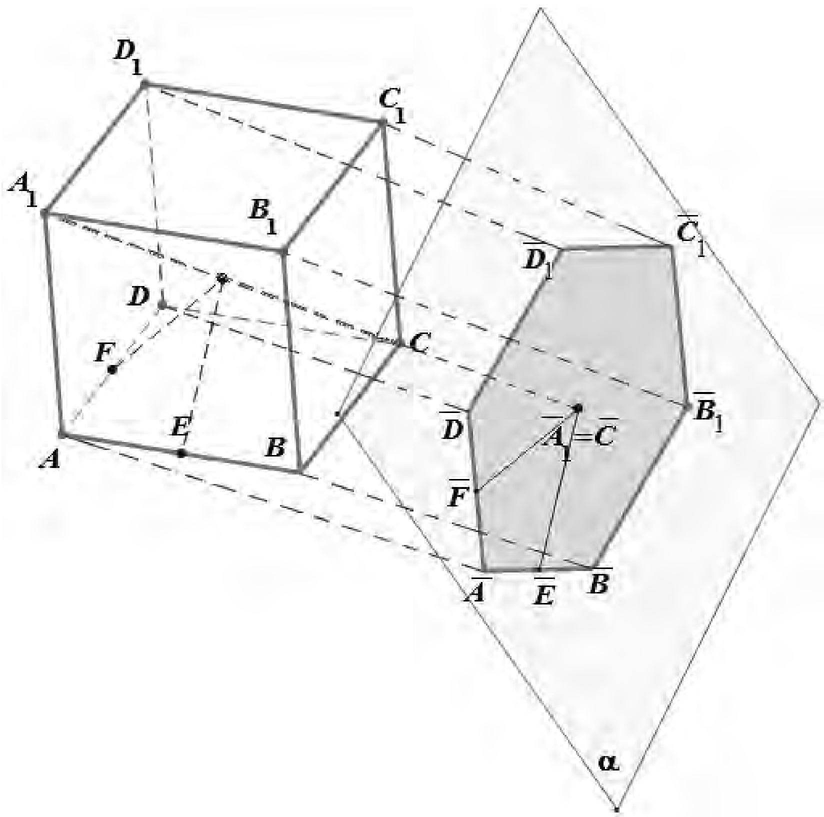
Уравнение $\sin x = 3$ не имеет решений.

Подставим $\sin x = \frac{1}{2}$ во второе уравнение и найдем, что $y = 2$.

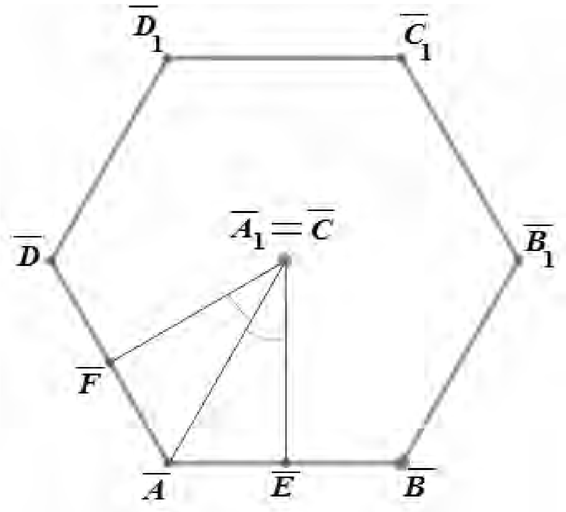
Ответ: $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \; y = 2, \; n \in Z$.

С2. К диагонали A_1C куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ провели перпендикуляры из середин ребер AB и AD. Найдите угол между этими перпендикулярами.

Решение. Обозначим через E и F середины ребер AB и AD соответственно. Проведем плоскость α, перпендикулярную диагонали A_1C. Проекция куба на плоскость α – правильный шестиугольник $\overline{A}\overline{B}\overline{B}_1\overline{C}_1\overline{D}_1\overline{D}$.



Перпендикуляры к A_1C параллельны плоскости α, поэтому угол между их проекциями равен искомому углу. Поскольку при проектировании сохраняются отношения длин проектируемых отрезков, проекции точек E и F – точки $\overline{E}$ и $\overline{F}$ – середины отрезков $\overline{A_1}\overline{B}$ и $\overline{A_1}\overline{D}$ соответственно. Значит, искомый угол равен $\angle \overline{E}\overline{A_1}\overline{F} = 60°$.



Ответ: $60°$

С3. Решите неравенство $\sqrt{x} - \dfrac{2}{\sqrt{x} - 2} \le 3$.

Решение. Сделав замену переменной $t = \sqrt{x}$, получаем

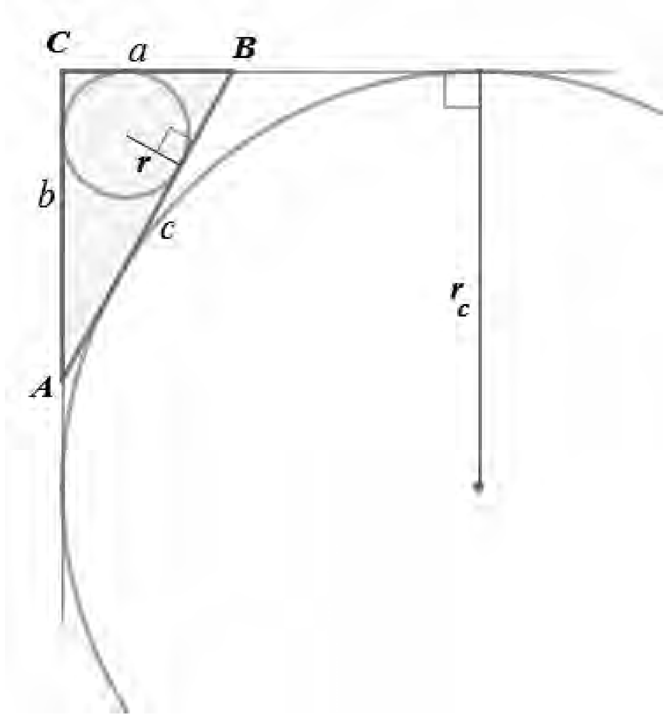
$$\begin{cases} t - \dfrac{2}{t-2} \le 3, \\ t \ge 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{t^2 - 5t + 4}{t-2} \le 0, \\ t \ge 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{(t-4)(t-1)}{t-2} \le 0, \\ t \ge 0. \end{cases}$$

Решим первое неравенство: $t \le 1;\ \ 2 < t \le 4$. Значит, $0 \le x \le 1,\ \ 4 < x \le 16$.

Ответ: $0 \le x \le 1,\ \ 4 < x \le 16$.

С4. Прямая отсекает от сторон прямого угла отрезки 3 и 4. Найдите радиус окружности, касающейся этой прямой и сторон угла.

Решение. В треугольнике ABC: $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, r – радиус вписанной окружности, а r_c – радиус вневписанной окружности, касающейся продолжений сторон a и b. S – площадь треугольника ABC.



Тогда $S=\dfrac{a+b+c}{2}r$, и $S=\dfrac{a+b-c}{2}r_c$.

Отсюда при $a=3, b=4$ находим: $c=5$ и

$$r=\frac{\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4}{\frac{1}{2}(3+4+5)}=1,\quad r_c=\frac{\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4}{\frac{1}{2}(3+4-5)}=6.$$

Ответ: 1 или 6.

C5 (кроме вар. 9,13). Найти все значения a, при каждом из которых уравнение $\cos\sqrt{a^2-x^2}=1$ имеет ровно восемь различных решений.

Решение. Перейдем к равносильной системе

$$\begin{cases} -|a|\le x\le |a|, \\ \sqrt{a^2-x^2}=2\pi k,\ k=0,1,2,... \end{cases}$$

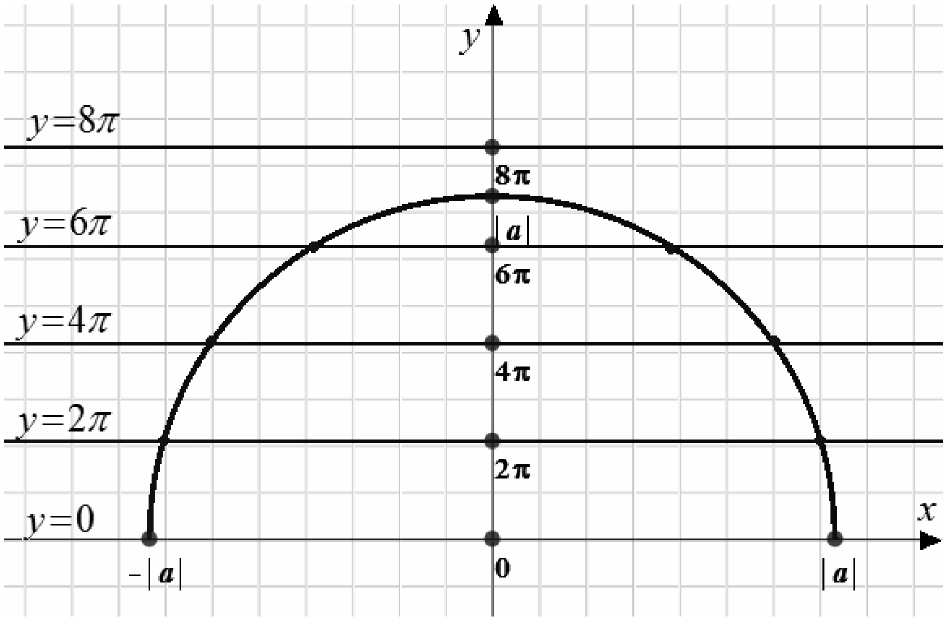
При $a=0$ система имеет ровно одно решение.

При $a\neq 0$ график функции $y=\sqrt{a^2-x^2}$ – верхняя полуокружность с центром в точке $(0;0)$ радиуса $|a|$.

При $|a|<2\pi k$ прямая $y=2\pi k$ не пересекает полуокружность.

При $|a|=2\pi k$ прямая $y=2\pi k$ касается полуокружности в точке $(0;2\pi k)$.

При $|a|>2\pi k$ прямая $y=2\pi k$ пересекает окружность ровно в двух точках, симметричных относительно оси ординат.



Значит, восемь решений может быть, только если $6\pi < |a| < 8\pi$.

Ответ: $-8\pi < a < -6\pi$; $6\pi < a < 8\pi$.

С5 (вар. 9,13) Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство $2x+2|x-a|+|x-1|>3$ выполняется для любого x.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x)=2x+2|x-a|+|x-1|$.

Если $x<a$ и $x<1$, то $f(x)=-x+2a+1$ убывает.

Если $x>a$ и $x>1$, то $f(x)=5x-2a-1$ возрастает.

На отрезке с концами в точках a и 1 функция $f(x)$ монотонна. Значит, наименьшее значение функции $f(x)$ равно $f(a)$ или $f(1)$. Поэтому решение задачи получаем из системы

$$\begin{cases} f(a)>3, \\ f(1)>3; \end{cases} \quad \begin{cases} 2a+|a-1|>3, \\ 2+2|a-1|>3. \end{cases}$$

1) Если $a \geq 1$, то $\begin{cases} 3a>4, \\ 2a>3; \end{cases} \quad a>\dfrac{3}{2}.$

2) Если $a<1$, то $\begin{cases} a>2, \\ a<\dfrac{1}{2}. \end{cases}$ В этом случае решений нет

Ответ: $a>\dfrac{3}{2}$.

С6. Найдите наибольшее натуральное n, для которого число $2009! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 2009$ делится на каждое из чисел k^k при $k = 1, 2, ..., n$.

Решение. Если $n^2 \le 2009$, то 2009! делится на n^n, т.к. числа

$$1 \cdot n,\ 2 \cdot n,\ 3 \cdot n,\ \dots,\ (n-1) \cdot n,\ n \cdot n$$

содержатся среди чисел $1, 2, 3, ..., 2009$.

Так как $1936 = 44^2 < 2009 < 45^2 = 2025$, достаточно проверить делимость 2009! на n^n при $n \ge 45$.

1. $n = 45$. 2009! делится на $45^{45} = 5^{45} \cdot 3^{90}$, так как среди чисел $1, 2, 3, ..., 2009$ найдется 45 чисел, кратных 5, и 90 чисел, кратных 3 ($5 \cdot 45 = 225 < 2009$ и $3 \cdot 90 = 270 < 2009$).
2. $n = 46$. 2009! делится на $46^{46} = 2^{46} \cdot 23^{46}$, так как среди чисел $1, 2, 3, ..., 2009$ найдется 46 чисел, кратных 2, и 46 чисел, кратных 23.

3. $n = 47$. 2009! не делится на 47^{47}, так как число 47 простое, и среди чисел среди чисел $1, 2, 3, ..., 2009$ есть лишь 42 числа, кратных 47 ($42 \cdot 47 = 1974 < 2009 < 43 \cdot 47 = 2021$).

Ответ: **46**

Варианты 2, 6, 10, 14

С1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2\cos^2 y + 11\cos y + 5 = 0, \\ 5\cos x - 2\cos y + 4 = 0. \end{cases}$$

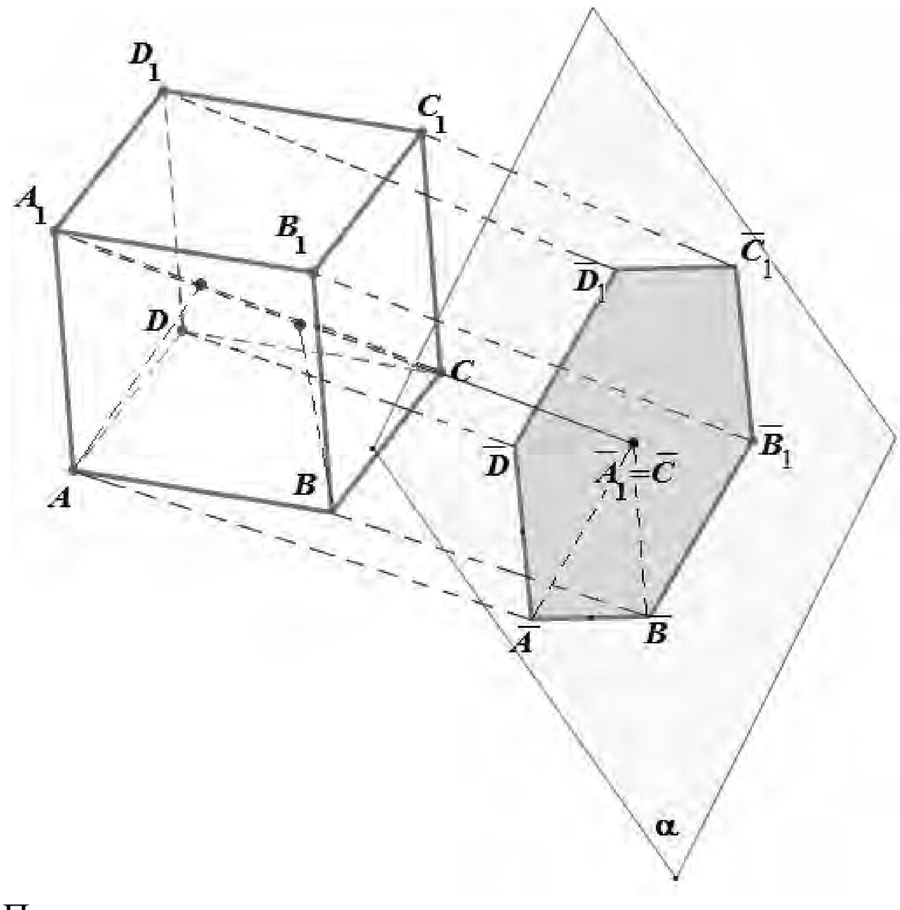
Решение. Из первого уравнения системы: $\cos y = -5$ или $\cos y = -\frac{1}{2}$.

Уравнение $\cos y = -5$ не имеет решений.

Подставив $\cos y = -\frac{1}{2}$ во второе уравнение, получаем: $\cos x = -1$.

Ответ: $x = \pi + 2\pi k, y = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ k, n \in Z$.

С2. К диагонали A_1C куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ провели перпендикуляры из вершин A и B. Найдите угол между этими перпендикулярами.



Решение. Проведем плоскость α, перпендикулярную диагонали A_1C. Проекция куба на плоскость α – правильный шестиугольник $\overline{A}\overline{B}\overline{B}_1\overline{C}_1\overline{D}_1\overline{D}$. Перпендикуляры к A_1C параллельны плоскости α, поэтому угол между их проекциями равен искомому углу: $\angle\overline{A}\overline{A}_1\overline{B} = 60°$.

Ответ: $60°$.

С3. Решите неравенство $\dfrac{2}{\sqrt{x}-3}+2\ge\sqrt{x}$.

Решение. Сделав замену переменной $t=\sqrt{x}$, получаем

$$\begin{cases}\dfrac{2}{t-3}+2\ge t,\\ t\ge 0;\end{cases}\qquad \begin{cases}\dfrac{t^2-5t+4}{t-3}\le 0,\\ t\ge 0.\end{cases}$$

Решим первое неравенство: $t\le 1,\ \ 3<t\le 4$. Значит, $0\le x\le 1,\ \ 9<x\le 16$.

Ответ: $0\le x\le 1,\ \ 9<x\le 16$.

С4. Прямая отсекает от сторон прямого угла отрезки 5 и 12. Найдите радиус окружности, касающейся этой прямой и сторон угла.

Решение. Полностью аналогично решению задачи С4 вариантов 1, 5, 9, 13.
Ответ: 2 или 15.

С5 (кроме вар. 10,14). Найти все значения a, при каждом из которых уравнение $\sin\sqrt{a^2-x^2}=0$ имеет ровно восемь различных решений.

Решение. Перейдем к равносильной системе

$$\begin{cases}-|a|\le x\le |a|,\\ \sqrt{a^2-x^2}=\pi k,\ k=0,1,2,...\end{cases}$$

При $a\ne 0$ график функции $y=\sqrt{a^2-x^2}$ – верхняя полуокружность с центром в точке $(0;0)$ радиуса $|a|$.

При $|a|<\pi k$ прямая $y=\pi k$ не пересекает полуокружность.

При $|a|=\pi k$ прямая $y=\pi k$ касается полуокружности в точке $(0;\pi k)$.

При $|a|>\pi k$ прямая $y=\pi k$ пересекает окружность ровно в двух точках, симметричных относительно оси ординат.

Значит, восемь решений может быть, только если $3\pi<|a|<4\pi$.

Ответ: $-4\pi<a<-3\pi;\ 3\pi<a<4\pi$.

С5 (вар.10,14). Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство $|x+1|+2|x+a|>3-2x$ выполняется для любого x.

Решение. Аналогично решению задания С5 вариантов 9 и 13.

Ответ: $a<-\frac{3}{2}$

С6. Найдите наибольшее натуральное n, для которого число $2010!=1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 2010$ делится на каждое из чисел k^k при $k=1,2,\ldots,n$.

Решение. Если $n^2 \le 2010$, то 2010! делится на n^n, т.к. числа

$$1\cdot n,\ 2\cdot n,\ 3\cdot n,\ \ldots,\ (n-1)\cdot n,\ n\cdot n$$

содержатся среди чисел $1,2,3,\ldots,2010$.

Так как $1936 = 44^2 < 2010 < 45^2 = 2025$, достаточно проверить делимость 2009! на n^n при $n \ge 45$.

1. $n=45$. 2010! делится на $45^{45}=5^{45}\cdot 3^{90}$, так как среди чисел $1,2,3,\ldots,2010$ найдется 45 чисел, кратных 5, и 90 чисел, кратных 3 ($5\cdot 45=225<2010$, и $3\cdot 90=270 < 2010$).
2. $n=46$. 2010! делится на $46^{46}=2^{46}\cdot 23^{46}$, так как среди чисел $1,2,3,\ldots,2010$ найдется 46 чисел, кратных 2, и 46 чисел, кратных 23.

3. $n=47$. 2010! не делится на 47^{47}, так как число 47 простое, и среди чисел среди чисел $1,2,3,\ldots,2010$ есть лишь 42 числа, кратных 47 ($42\cdot 47=1974<2010<43\cdot 47=2021$).

Ответ: **46**

Варианты 3, 7, 11, 15

С1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2\,\mathrm{tg}\,x + 5y = 12, \\ 2\,\mathrm{tg}\,x + 3y = 8. \end{cases}$$

Вычитая почленно из первого уравнения второе, получаем: $y = 2$.
Значит, $\mathrm{tg}\,x = 1$.

Ответ: $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ y = 2,\ n \in Z$.

С2. Диагональ A_1C куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ служит ребром двугранного угла, грани которого проходят через середины ребер AB и DD_1. Найдите величину этого угла.

Решение. Аналогично решению задачи С2 в вариантах 1, 5, 9 и 13.

Ответ: $120°$.

С3. Решите неравенство $\sqrt{4-x^2} + \dfrac{\sqrt{x^2}}{x} \geq 0$.

Решение. Если $x > 0$, то неравенство принимает вид $\sqrt{4-x^2} + 1 \geq 0$.
Значит, любое число из промежутка $(0;2]$ является решением.

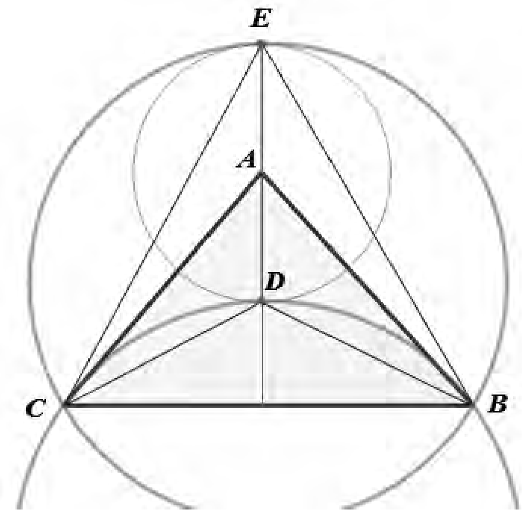
Если $x < 0$, то неравенство принимает вид $\sqrt{4-x^2} \geq 1$.
Значит,

$$\begin{cases} -2 \leq x < 0, \\ x^2 \leq 3; \end{cases} \qquad -\sqrt{3} \leq x < 0.$$

Ответ: $-\sqrt{3} \leq x < 0,\ 0 < x \leq 2$.

С4. Противолежащая основанию вершина равнобедренного треугольника с боковой стороной 5 и основанием 6 служит центром данной окружности радиуса 2. Найдите радиус окружности, касающейся данной и проходящей через концы основания треугольника.

Решение. Если в треугольнике a, b и c – длины сторон, R – радиус описанной окружности, а S – площадь, то $R = \dfrac{abc}{4S}$.



Возникает два случая.
1 случай. Окружности касаются внешним образом. По условию $AD = 2$. $DC = DB = \sqrt{13}$. Тогда радиус окружности, описанной вокруг треугольника BCD равен

$$R = \frac{\sqrt{13} \cdot \sqrt{13} \cdot 6}{4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6} = \frac{13}{4}.$$

2 случай. Одна окружность внутри другой. $AE = 2$. Тогда $EC = EB = \sqrt{45}$. Радиус окружности, описанной около треугольника BCE, равен

$$R = \frac{\sqrt{45} \cdot \sqrt{45} \cdot 6}{4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6} = \frac{15}{4}.$$

Ответ: $\dfrac{13}{4}$ или $\dfrac{15}{4}$.

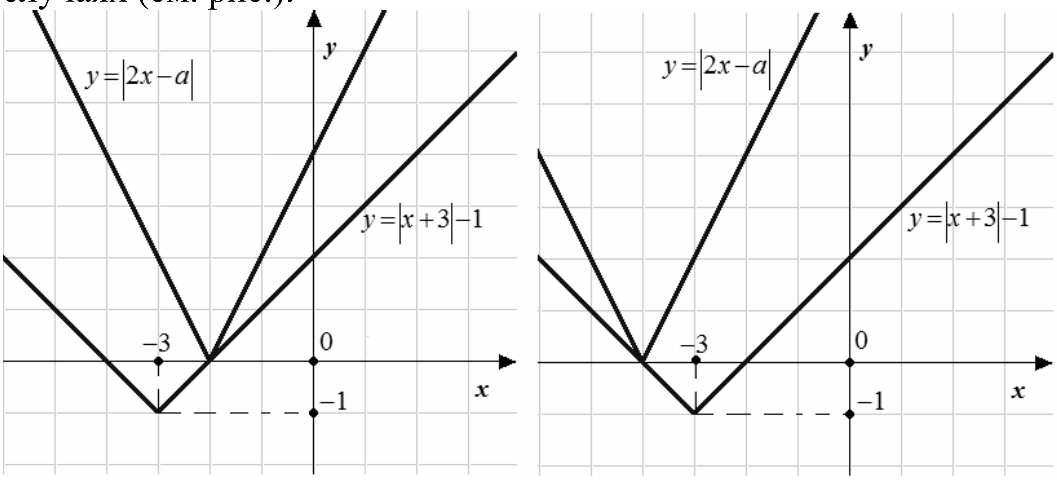
С5 (кроме вар. 11, 15). Найти все значения a, при каждом из которых уравнение $\cos\sqrt{a^2 - x^2} = 1$ имеет ровно десять различных решений.

Решение. Аналогично решению задачи С5 вариантов 1, 5**.**

Ответ: $-10\pi < a < -8\pi;\ 8\pi < a < 10\pi$.

C5 (вар. 11,15). Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $|2x-a|+1=|x+3|$ имеет ровно один корень.

Решение. Рассмотрим графики функций $f(x)=|x+3|-1$ и $g(x)=|2x-a|$. Графики этих функций имеют единственную общую точку только в двух случаях (см. рис.).



Значит, $\frac{a}{2}=-2$ или $\frac{a}{2}=-4$.

Ответ: -4 и -8.

C6. Найдите наименьшее натуральное n, для которого число n^n не является делителем числа $2009!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot2009$.

Решение. Аналогично решению задачи C6 вариантов 1, 5, 9, 13.

Ответ: 47.

Варианты 4, 8, 12, 16

С1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3\operatorname{tg} x + 4\cos y = 5, \\ 3\operatorname{tg} x + 8\cos y = 7. \end{cases}$$

Решение. Аналогично решению задания С1 вариантов 3, 7, 11, 15.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ y = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k, n \in Z$.

С2. Диагональ A_1C куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ служит ребром двугранного угла, грани которого проходят через вершины B и D. Найдите величину этого угла.

Решение. Аналогично решению задачи С2 в вариантах 3, 7, 11, 15.

Ответ: $120°$.

С3. Решите неравенство $\sqrt{4 - x^2} \ge \frac{\sqrt{x^2}}{x}$.

Решение. Решение аналогично решению задачи С3 вариантов 3, 7, 11, 15.

Ответ: $-2 \le x < 0,\ 0 < x \le \sqrt{3}$.

С4. Противолежащая основанию вершина равнобедренного треугольника с боковой стороной 5 и основанием 8 служит центром данной окружности радиуса 2. Найти радиус окружности, касающейся данной и проходящей через концы основания треугольника.

Решение. Аналогично решению задачи С4 вариантов 3, 7, 11, 15.

Ответ: $\frac{17}{2}$ или $\frac{41}{10}$.

С5 (кроме вар. 12, 16). Найти все значения a, при каждом из которых уравнение $\sin\sqrt{a^2 - x^2} = 0$ имеет ровно шесть различных решений.

Решение. Решение аналогично решению задачи С5 из вариантов 2, 6 .

Ответ: $-3\pi < a < -2\pi;\ 2\pi < a < 3\pi$.

С5 (вар.12,16). Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $1 = |x-3| - |2x+a|$ имеет ровно один корень.

Решение. Аналогично решению задания С5 вариантов 11 и 15.

Ответ: -4 и -8.

С6. Найдите наименьшее натуральное n, для которого число $2010! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 2010$ не делится на n^n.

Решение. Аналогично решению задачи С6 вариантов 2, 6, 10, 14.

Ответ: 47.