С. А. Шестаков, П. И. Захаров

ЕГЭ 2011

Математика

C1
C2
C3
C4
C5
C6

Задача C1

Уравнения и системы уравнений

Под редакцией
А. Л. Семенова и И. В. Ященко

Разработано МИОО

ГОТОВИМСЯ К ЕГЭ

С. А. Шестаков, П. И. Захаров

ЕГЭ 2011. Математика
Задача С1
Уравнения и системы уравнений

Под редакцией А. Л. Семенова и И. В. Ященко

Москва
Издательство МЦНМО
2011

УДК 373:51
ББК 22.1я72
Ш51

Шестаков С. А., Захаров П. И.
Ш51 ЕГЭ 2011. Математика. Задача C1 / Под ред. А. Л. Семенова и И. В. Ященко. — М.: МЦНМО, 2011. — 120 с.

ISBN 978-5-94057-663-1

Пособия по математике серии «ЕГЭ 2011. Математика» ориентированы на подготовку учащихся старшей школы к успешной сдаче Единого государственного экзамена по математике. В данном учебном пособии представлен материал для подготовки к решению задачи C1.

На различных этапах обучения пособие поможет обеспечить уровневый подход к организации повторения, осуществить контроль и самоконтроль знаний по теме «Уравнения и системы уравнений».

Пособие предназначено для учащихся старшей школы, учителей математики, родителей.

ББК 22.1я72

ISBN 978-5-94057-663-1

Предисловие

Это пособие предназначено для подготовки к решению задач по теме «Уравнения и системы уравнений» и, в частности, задачи C1 Единого государственного экзамена (ЕГЭ) по математике.

Задача C1 представляет собой уравнение или систему уравнений. Ключевым признаком задачи является необходимость отбора полученных в результате решения того или иного уравнения корней в соответствии с вытекающими из условия ограничениями. При этом для решения задачи C1 необходимо уверенное владение навыками решения всех типов уравнений и систем уравнений, изучаемых в основной и старшей школе: целых рациональных, дробно-рациональных, иррациональных, тригонометрических, показательных, логарифмических.

Для того чтобы подготовку к ЕГЭ сделать максимально эффективной, в пособие включены задания, соответствующие всем шести функционально-числовым линиям школьного курса, и описаны основные методы решения уравнений и систем уравнений для каждой из этих линий. Такое построение пособия, с одной стороны, позволит выявить существующие пробелы и проблемные зоны в подготовке с целью их устранения и выработки устойчивых навыков решения уравнений и систем уравнений, а с другой — позволит использовать комплексный подход при организации и проведении обобщающего повторения.

Разумеется, приступать к изучению методов решения уравнений и систем уравнений, соответствующих по уровню сложности задаче C1 ЕГЭ по математике, имеет смысл только в том случае, если решение простейших уравнений по каждой из функционально-числовых линий школьного курса не вызывает никаких затруднений. Для проверки навыков решения таких уравнений нужно предварительно решить тренировочные и диагностические работы пособия С. А. Шестакова «ЕГЭ 2011. Математика. Задача B3» (М.: МЦНМО, 2011). После этого нужно выполнить вводную диагностическую работу настоящего пособия. Она состоит из двух частей: в первой представлены 12 уравнений — по два на каждую функционально-числовую линию школьного курса, во второй, имеющей ту же структуру, — 12 систем уравнений. Вначале нужно решить первую часть, постаравшись уложиться в два часа. Если процент правильно выполненных заданий окажется не меньше 75, можно переходить к решению задач второй части. В противном случае нужно определить, какие задачи вызывают затруднения, обратиться при необходимости к разбору задач, изучить методы решения, выполнить тренировочные работы и только после этого переходить к решению задач части 2, постаравшись потратить на нее не более двух часов. Если процент правильно выполненных заданий и здесь окажется не меньше 75, можно перейти к решению следующих диагностических работ, иначе — обратиться к методам решения соответствующих систем, разобраться в них, решить тренировочные работы и только потом — оставшиеся диагностические. В любом случае при наличии уравнений или систем уравнений, вызвавших затруднения или решенных неправильно, нужно проработать соответствующий материал пособия и решить тренировочные работы.

Пособие содержит 6 диагностических и 13 тренировочных работ, а также разбор задач вводной диагностической работы и необходимые методические рекомендации по решению уравнений и систем уравнений, проиллюстрированные большим числом примеров.

Подчеркнем, что в пособие включены задания, в основном отвечающие по уровню сложности заданию С1 ЕГЭ по математике, и подготовительные задачи.

При подготовке к решению задач части С Единого государственного экзамена важно помнить следующее. Проверка ответов осуществляется экспертами. Поэтому приводимое решение должно содержать все необходимые пояснения и обоснования и быть понятным не только его автору, но и любому компетентному человеку, в частности, проверяющему.

Диагностическая работа

Часть I. Уравнения

Решите уравнения.

1. $3(6x^2-13x+6)^2-10(6x^2-13x)=53.$

2. $|x^2-9|+|x+3|=x^2+x-6.$

3. $\dfrac{x^7-4x^5+4x^2-7x-2}{x^7-4x^5+3x^2-4x-4}=1.$

4. $\dfrac{2}{x^2-2x-3}+\dfrac{x-5}{x^2-1}=\dfrac{1}{x^2-4x+3}.$

5. $(x-3)\sqrt{x^2-5x+4}=2x-6.$

6. $\sqrt{\dfrac{3-x}{x-1}}+3\sqrt{\dfrac{x-1}{3-x}}=4.$

7. $\sin 3x+\sin 4x+\sin 5x=0.$

8. $\arcsin x(4\arcsin x+\arccos x)=\pi^2.$

9. $x\cdot 2^x+3=3\cdot 2^x+x.$

10. $4^{\sin x}+2^{5-2\sin x}=18.$

11. $\log_3(x^2-12)+0{,}5\log_{\frac{1}{3}}x^2=0.$

12. $\log_x 2-\log_4 x+\dfrac{7}{6}=0.$

Часть II. Системы уравнений

Решите систему уравнений.

1. $\begin{cases} xy+x+y=11, \\ x^2y+xy^2=30. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x^2+y^2=z, \\ x+y+z=-0{,}5. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}=\dfrac{5}{6}, \\ x^2-y^2=5. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{x^2+2y^2}{y}=3, \\ \left(\dfrac{x^2+2y^2}{y}\right)^2=x^2+2y^2-3y+9x. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=7, \\ \sqrt{xy}=10. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{2x+y+2}=7, \\ 3x+2y=23. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \sqrt{y+\cos^2 x-2}+\cos x=0, \\ y\sin^2 x-\sin x-1=0. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dfrac{2\sin^2 x+3\sin x+1}{\sqrt{-y}}=0, \\ y+4\sqrt{3}\cos x=0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dfrac{81^{\cos y}-4\cdot 9^{\cos y}+3}{\sqrt{1-2\sin y}}=0, \\ \sqrt{x+3}+\cos 2y+1=0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3\cdot 3^{\operatorname{tg} y}+2=3^{-\operatorname{tg} y}, \\ \sqrt{x-2}+6\cos y=0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 8\log_9(xy)=\log_9 x^8, \\ 5x+2y+22=0. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \dfrac{2\log_2^2(\sin x)+3\log_2(\sin x)+1}{\log_3(-\cos x)}=0, \\ \sqrt{y-7}=\sqrt{2}\cos x+1. \end{cases}$

Часть I. Уравнения

Главным этапом решения любого уравнения является сведе́ние его к одному или нескольким простейшим уравнениям. Под простейшими уравнениями в зависимости от принадлежности к той или иной функционально-числовой линии школьного курса подразумеваются следующие:

• для целых рациональных уравнений — линейные и квадратные уравнения;

• для дробно-рациональных уравнений — уравнения вида $\frac{f(x)}{g(x)}=0$, где $f(x)$ и $g(x)$ — многочлены первой или второй степени;

• для иррациональных уравнений — уравнения вида $\sqrt{f(x)}=g(x)$, где $f(x)$ — многочлен первой или второй степени, $g(x)$ — многочлен степени не выше первой;

• для тригонометрических уравнений — уравнения вида $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, где a — действительное число;

• для показательных уравнений — уравнения вида $a^{f(x)} = b$, где a — положительное действительное число, отличное от единицы, b — действительное число, $f(x)$ — многочлен первой или второй степени;

• для логарифмических уравнений — уравнения вида $\log_a f(x) = b$, где b — действительное число, a — положительное действительное число, отличное от 1, $f(x)$ — многочлен первой или второй степени.

Существует два основных способа сведения уравнения к одному или нескольким простейшим: алгебраические преобразования и замена переменной. Кроме того, решение некоторых уравнений требует применения таких свойств функций, как монотонность и ограниченность.

§ 1. Целые рациональные уравнения

Как уже отмечалось, простейшими целыми (слово «рациональные» иногда будем опускать) уравнениями являются линейные и квадратные. Решение практически любых целых уравнений, в том числе и тех, которые получены из дробно-рациональных, иррациональных, тригонометрических, показательных и логарифмических уравнений посредством замены переменной либо иным способом, сводится к решению линейных и квадратных уравнений. Поэтому умение быстро и без ошибок решать линейные и квадратные уравнения является одним из важнейших: обидно, придумав способ решения относительно сложной задачи и сведя ее к линейному или квадратному уравнению, ошибиться на последнем шаге. Далее решение линейных и квадратных уравнений не рассматривается (рекомендуется решать их самостоятельно), а сразу после их приведения к стандартному виду выписываются корни.

Рассмотрим основные способы решения целых рациональных уравнений.

1. Алгебраические преобразования

Одним из основных способов сведения уравнения к одному или нескольким простейшим являются алгебраические преобразования одной или обеих его частей. В таких случаях, как правило, все члены уравнения переносят в одну из его частей, приводят подобные и пытаются разложить полученное выражение на множители. Для целых уравнений с этой целью обычно используют формулы сокращенного умножения. Иногда, чтобы применить одну из формул сокращенного умножения, требуется применить искусственное преобразование: добавить и вычесть некоторое выражение. Если удается «угадать» корень целого рационального уравнения степени выше второй, т. е. корень x_0 многочлена $p(x)$ в левой части уравнения $p(x)=0$, то можно понизить степень уравнения, воспользовавшись тем, что тогда $p(x)=(x-x_0)q(x)$ и степень многочлена $q(x)$ ниже степени многочлена $p(x)$. Для получения формулы $p(x)=(x-x_0)q(x)$ используют либо разложение на множители, либо деление столбиком многочлена $p(x)$ на $x-x_0$. В некоторых случаях для того чтобы свести уравнение к линейному или квадратному, достаточно воспользоваться условием равенства степеней. Рассмотрим примеры решения целых уравнений с помощью алгебраических преобразований, начав с линейных и квадратных уравнений с иррациональными коэффициентами, которые, несмотря на их принадлежность к простейшим, порой вызывают неразрешимые трудности у выпускников именно в силу иррациональности коэффициентов.

Пример 1. Решите уравнение

$$2(\sqrt{3}-x)+\sqrt{3}(2-x)=2\sqrt{3}-4.$$

Решение. Данное уравнение является линейным. Выполним необходимые преобразования:

$$2(\sqrt{3}-x)+\sqrt{3}(2-x)=2\sqrt{3}-4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\sqrt{3}-2x+2\sqrt{3}-\sqrt{3}x=2\sqrt{3}-4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4\sqrt{3}-(\sqrt{3}+2)x=2\sqrt{3}-4 \Leftrightarrow (\sqrt{3}+2)x=2\sqrt{3}+4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{2\sqrt{3}+4}{\sqrt{3}+2} \Leftrightarrow x=\frac{2(\sqrt{3}+2)}{\sqrt{3}+2} \Leftrightarrow x=2.$$

Ответ: 2.

Пример 2. Решите уравнение

$$2x^2-(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})x+\sqrt{6}+2=0.$$

Решение. Данное уравнение является квадратным. Найдем дискриминант D уравнения:

$$D=(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})^2-4\cdot 2\cdot(\sqrt{6}+2)=$$
$$=12+12\sqrt{6}+18-8\sqrt{6}-16=14+4\sqrt{6}.$$

Дискриминант представляет собой выражение вида $p+q\sqrt{r}$. В том случае, если это выражение является полным квадратом, обычно используют рассуждения, аналогичные следующим. Предположим, что дискриминант является квадратом суммы чисел a и b:

$$(a+b)^2=14+4\sqrt{6}.$$

Пусть сумма квадратов этих чисел равна 14, а их удвоенное произведение равно $4\sqrt{6}$. Тогда $ab=2\sqrt{6}$. Наиболее вероятными «претендентами» на роль a и b являются либо 2 и $\sqrt{6}$, либо $2\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$, либо $2\sqrt{3}$ и $\sqrt{2}$. Поскольку сумма квадратов искомых чисел равна 14, то это числа $2\sqrt{3}$ и $\sqrt{2}$. Следовательно, $\sqrt{D}=2\sqrt{3}+\sqrt{2}$. Тогда по формуле корней квадратного уравнения:

$$\left[\begin{array}{l} x_1=\dfrac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4}, \\ x_2=\dfrac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=\sqrt{3}+\sqrt{2}, \\ x_2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\sqrt{3}+\sqrt{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Условие равенства степеней

Уравнение вида $(g(x))^{2n+1} = (p(x))^{2n+1}$, где n — натуральное число, в силу свойств степенной функции с нечетным натуральным показателем равносильно уравнению $g(x) = p(x)$. Уравнение вида $(g(x))^{2n} = (p(x))^{2n}$, где n — натуральное число, в силу свойств степенной функции с четным натуральным показателем равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} p(x)=q(x), \\ p(x)=-q(x). \end{array}\right.$

Пример 3. Решите уравнение

$$(x-3)^6+(x^2-2x-1)^3=0.$$

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$(x-3)^6 = -(x^2-2x-1)^3.$$

Далее, поскольку $a^6=(a^2)^3$, $-b^3=(-b)^3$, получим

$$((x-3)^2)^3 = (-x^2+2x+1)^3.$$

В силу того, что $c^3=d^3 \iff c=d$, последнее уравнение приводится к виду $(x-3)^2=-x^2+2x+1$. Перенеся все члены уравнения в левую часть, раскрыв скобки, приведя подобные и разделив обе части полученного уравнения на число 2, получим квадратное уравнение $x^2-4x+4=0$, единственным корнем которого является 2.

Ответ: 2.

Разложение на множители

Среди целых уравнений степени выше второй, решаемых с помощью разложения на множители (для чего применяют формулы сокращенного умножения и вынесение за скобку общего множителя), можно выделить симметрическое уравнение третьего порядка $ax^3+bx^2+bx+a=0$. Перегруппировав слагаемые и вынося за скобку общие множители, получим $a(x^3+1)+bx(x+1)=0$. Применим в левой части уравнения формулу суммы кубов и вновь вынесем общий множитель за скобку:

$$a(x+1)(x^2-x+1)+bx(x+1) = (x+1)(ax^2-ax+a+bx).$$

Таким образом, уравнение сводится к линейному уравнению $x+1=0$, корнем которого является число -1, и квадратному уравнению $ax^2-(a-b)x+a=0$.

Отметим, что для большинства других целых уравнений степени выше второй стандартный алгоритм решения указать не удается, но практически всегда в их решении можно существенно продвинуться, следуя одной из трех «инструкций», или «правил»: «примени формулу», «добавь и вычти», «угадай корень». Рассмотрим несколько примеров.

Пример 4. Решите уравнение

$$5x^3 - 21x^2 - 21x + 5 = 0.$$

Решение. Перегруппировав слагаемые и вынося за скобку общие множители, получим $5(x^3 + 1) - 21x(x + 1) = 0$. Применим в левой части уравнения формулу суммы кубов и вновь вынесем общий множитель за скобку:

$$5(x+1)(x^2 - x + 1) - 21x(x+1) = (x+1)(5x^2 - 26x + 5).$$

Таким образом, уравнение сводится к линейному уравнению $x + {}$ ${} + 1 = 0$, корнем которого является число -1, и квадратному уравнению $5x^2 - 26x + 5 = 0$, корнями которого являются числа $\frac{1}{5}$ и 5.

Ответ: -1; $\frac{1}{5}$; 5.

Пример 5. Решите уравнение

$$x^4 - 2x^3 + x^2 - 9 = 0.$$

Решение. Этот пример иллюстрирует применение формул сокращенного умножения. Сначала воспользуемся формулой квадрата разности двух чисел: $x^4 - 2x^3 + x^2 = (x^2 - x)^2$. Теперь уравнение можно переписать так: $(x^2 - x)^2 - 3^2 = 0$. Применив формулу разности квадратов, получим $(x^2 - x - 3)(x^2 - x + 3) = 0$, откуда $x^2 - x - 3 = 0$ либо $x^2 - x + 3 = 0$. Корнями уравнения $x^2 - x - 3 = 0$ являются числа $\frac{1-\sqrt{13}}{2}$ и $\frac{1+\sqrt{13}}{2}$. Уравнение $x^2 - x + 3 = 0$ действительных корней не имеет в силу отрицательности дискриминанта.

Ответ: $\frac{1-\sqrt{13}}{2}$; $\frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

Пример 6. Решите уравнение

$$(x-4)^3 + (x-4)^2 + (x-4)(x-3) + (x-3)^2 + (x-3)^3 = 6.$$

Решение. Для решения уравнения вновь воспользуемся правилом «примени формулу». Выражение

$$(x-4)^2 + (x-4)(x-3) + (x-3)^2$$

представляет собой неполный квадрат суммы чисел $x - 3$ и $x - 4$. Поэтому если умножить его на разность этих чисел $(x - 3) - (x - 4)$, получим разность кубов этих чисел. Но $(x-3)-(x-4)=1$, поэтому

$$(x-4)^2+(x-4)(x-3)+(x-3)^2=(x-3)^3-(x-4)^3.$$

Теперь уравнение можно переписать так:

$$(x-4)^3+(x-3)^3-(x-4)^3+(x-3)^3=6,$$

откуда, приведя подобные и разделив обе части уравнения на число 2, получаем $(x-3)^3=3$. Значит, $x-3=\sqrt[3]{3}$, и $x=3+\sqrt[3]{3}$.

Ответ: $3+\sqrt[3]{3}$.

Пример 7. Решите уравнение $x^4+4x-1=0$.

Решение. Для того чтобы решить это уравнение, попробуем применить к его левой части правило «добавь и вычти», дополнив x^4 до квадрата суммы:

$$x^4+4x-1=(x^4+2x^2+1)-2x^2+4x-2=$$
$$=(x^2+1)^2-2(x^2-2x+1)=(x^2+1)^2-2(x-1)^2.$$

Далее,

$$(x^2+1)^2-2(x-1)^2=(x^2+1)^2-\left(\sqrt{2}x-\sqrt{2}\right)^2=$$
$$=\left(x^2+1+\sqrt{2}x-\sqrt{2}\right)\left(x^2+1-\sqrt{2}x+\sqrt{2}\right).$$

Получаем два квадратных уравнения:

$$x^2+\sqrt{2}x+1-\sqrt{2}=0 \quad \text{и} \quad x^2-\sqrt{2}x+1+\sqrt{2}=0.$$

Корнями уравнения $x^2+\sqrt{2}x+1-\sqrt{2}=0$ являются числа

$$\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2} \quad \text{и} \quad \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2}.$$

Уравнение $x^2-\sqrt{2}x+1+\sqrt{2}=0$ действительных корней не имеет в силу отрицательности дискриминанта.

Ответ: $\dfrac{-\sqrt{2}-\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2};\ \dfrac{-\sqrt{2}+\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2}.$

Пример 8. Решите уравнение $2x^3+3x^2-1=0$.

Решение. Левая часть уравнения представляет собой многочлен третьей степени с целыми коэффициентами. Для решения уравнения такого типа следует применить инструкцию «угадай корень», выяснив, не является ли какое-нибудь целое число x_0 корнем уравнения. Такое число нужно искать среди делителей свободного члена. В самом деле, если x_0 — корень какого-либо целого уравнения с целыми коэффициентами, например, уравнения $ax^3+bx^2+cx+d=0$, то при его подстановке в уравнение получим верное числовое равенство $ax_0^3+bx_0^2+cx_0+d=0$. Так как каждое из трех первых слагаемых левой части этого равенства делится на x_0, то и последнее слагаемое d должно делиться на x_0. Аналогичные рассуждения применимы и для уравнений степени выше третьей. Если такое число x_0 существует, то левую часть уравнения можно будет разложить на множители, одним из которых является $x-x_0$. Для этого следует «разбить на пары» левую часть уравнения таким образом, чтобы в каждой паре можно было выделить множитель $x-x_0$, либо выполнить деление многочлена на многочлен столбиком. Так, число -1 является корнем данного уравнения, в чем можно убедиться простой проверкой. Теперь левую часть уравнения можно преобразовать следующим образом:

$$2x^3+3x^2-1=(2x^3+2x^2)+(x^2-1)=$$
$$=2x^2(x+1)+(x+1)(x-1)=(x+1)(2x^2+x-1).$$

Таким образом, $x=-1$ либо $2x^2+x-1=0$. Корнями последнего уравнения являются числа -1 и 0,5.

Ответ: -1; 0,5.

Уравнения, содержащие более одной переменной

Уравнения, содержащие более одной переменной, обычно ставят в тупик недостаточно подготовленного выпускника, хотя в большинстве случаев их решение не требует изощренных преобразований или нестандартных подходов. Как правило, такие уравнения являются квадратными относительно одной из переменных, и ключевая идея заключается в исследовании дискриминанта уравнения: из условия его неотрицательности находятся допустимые значения второй переменной.

Пример 9. Найдите все пары $(x;y)$ чисел x и y, для каждой из которых $5x^2-4xy+y^2-8x+2y+5=0$.

Решение. Переписав данное уравнение как квадратное относительно x, получим

$$5x^2-4(y+2)x+y^2+2y+5=0.$$

Пусть D — дискриминант уравнения, тогда

$$\frac{D}{4}=4(y+2)^2-5(y^2+2y+5),$$

откуда, раскрыв скобки и приведя подобные, находим

$$\frac{D}{4}=-y^2+6y-9=-(y-3)^2.$$

Если $y \neq 3$, то $\frac{D}{4} < 0$, и уравнение не имеет решений. Если $y = 3$, то $\frac{D}{4} = 0$, и тогда $x = \frac{2(y+2)}{5} = 2$.

Ответ: $(2; 3)$.

2. Замена переменной

Уравнение вида $a \cdot f^2(x) + b \cdot f(x) + c = 0$

Такие уравнения (их иногда называют трехчленными) являются одними из наиболее распространенных. Наверное, самый известный пример этого типа уравнений — биквадратное уравнение $ax^4 + bx^2 + c = 0$ (здесь $f(x) = x^2$). Заменой переменной $t = f(x)$ трехчленное уравнение сводится к квадратному относительно переменной t уравнению $at^2 + bt + c = 0$. В качестве первого примера подобного типа уравнений рассмотрим **задачу 1 части I** вводной диагностической работы.

Пример 1. Решите уравнение

$$3(6x^2 - 13x + 6)^2 - 10(6x^2 - 13x) = 53.$$

Решение. Обозначим $6x^2 - 13x + 6$ через t. Тогда $6x^2 - 13x = t - 6$ и уравнение примет вид $3t^2 - 10(t-6) = 53$, откуда $3t^2 - 10t + 7 = 0$. Корнями полученного квадратного уравнения являются числа 1 и $\frac{7}{3}$. Сделаем обратную замену. При $t = 1$ получим уравнение $6x^2 - 13x + 6 = 1$, откуда $6x^2 - 13x + 5 = 0$. Корнями последнего уравнения являются числа $\frac{1}{2}$ и $\frac{5}{3}$. При $t = \frac{7}{3}$ получим уравнение $6x^2 - 13x + 6 = \frac{7}{3}$, откуда, умножив обе части уравнения на 3, получаем $18x^2 - 39x + 18 = 7$ и, значит, $18x^2 - 39x + 11 = 0$. Корнями последнего уравнения являются числа $\frac{1}{3}$ и $\frac{11}{6}$.

Ответ: $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{5}{3}$; $\frac{11}{6}$.

Пример 2. Решите уравнение

$$3(2x-1)^4 - 16(2x-1)^2 + 16 = 0.$$

Решение. Сделаем замену переменной: $z = (2x-1)^2$, $z \geqslant 0$. Уравнение примет вид: $3z^2 - 16z + 16 = 0$. Корни этого уравнения: $\left[\begin{array}{l} z = 4, \\ z = \frac{4}{3}. \end{array}\right.$

Условию $z \geqslant 0$ удовлетворяет каждый из корней уравнения. Вернемся к переменной x:

$$\left[\begin{array}{l}(2x-1)^2 = 4,\\ (2x-1)^2 = \frac{4}{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x-1 = 2,\\ 2x-1 = -2,\\ 2x-1 = \sqrt{\frac{4}{3}},\\ 2x-1 = -\sqrt{\frac{4}{3}}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{3}{2},\\ x = -\frac{1}{2},\\ x = \frac{\sqrt{3}+2}{2\sqrt{3}},\\ x = \frac{\sqrt{3}-2}{2\sqrt{3}}.\end{array}\right.$$

Ответ: $-\frac{1}{2}$; $\frac{\sqrt{3}-2}{2\sqrt{3}}$; $\frac{\sqrt{3}+2}{2\sqrt{3}}$; $\frac{3}{2}$.

Уравнение вида $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)=k$, *где* $a+b=c+d$

Уравнение указанного типа после перемножения двух первых и двух последних скобок в левой части легко преобразовать к виду

$$(x^2-(a+b)x+ab)(x^2-(a+b)x+cd) = k$$

и свести к квадратному заменой

$$t = x^2-(a+b)x \quad \text{или} \quad t = x^2-(a+b)x+ab.$$

Иногда левая часть таких уравнений представляет собой произведение двух квадратных трехчленов и требует предварительного разложения каждого из них на множители.

Пример 3. Решите уравнение $(x^2-4x+3)(x^2+6x+8)+24=0$.

Решение. Разложим каждый из квадратных трехчленов в левой части уравнения на множители. Корнями трехчлена x^2-4x+3 являются числа 1 и 3, поэтому $x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$. Корнями трехчлена x^2+6x+8 являются числа -4 и -2, поэтому

$$x^2+6x+8 = (x+4)(x+2).$$

Теперь данное уравнение можно переписать в виде

$$(x-1)(x-3)(x+4)(x+2)+24 = 0.$$

Поскольку $1+(-2)=3+(-4)$, перемножим скобки левой части полученного уравнения следующим образом: первую с последней, а вторую с третьей. Получим $(x^2+x-2)(x^2+x-12)+24=0$. Сделаем замену переменной. Пусть $t=x^2+x-2$. Тогда $x^2+x-12=t-10$, и уравнение примет вид $t(t-10)+24=0$, откуда $t^2-10t+24=0$. Корнями полученного квадратного уравнения являются числа 4 и 6. Сделаем обратную замену. При $t=4$ получим уравнение $x^2+x-2=4$, откуда $x^2+x-6=0$. Корнями последнего уравнения являются числа -3 и 2. При $t=6$ получим уравнение $x^2+x-2=6$, откуда $x^2+x-8=$ $=0$. Корнями этого уравнения являются числа $\frac{-1+\sqrt{33}}{2}$ и $\frac{-1-\sqrt{33}}{2}$.

Ответ: $\frac{-1-\sqrt{33}}{2}$; -3; 2; $\frac{-1+\sqrt{33}}{2}$.

Уравнение вида $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)=kx^2$, где $ab=cd\neq 0$

Такие уравнения сводятся к квадратным после следующих преобразований. Перемножим две первые и две последние скобки левой части с учетом того, что $ab=cd$:

$$(x^2-(a+b)x+ab)(x^2-(c+d)x+ab) = kx^2.$$

Теперь, учитывая то, что $x\neq 0$ (иначе одно из чисел a, b, c, d должно быть равно нулю, а это противоречит условию), разделим обе части уравнения на x^2 следующим образом:

$$\left(\frac{x^2-(a+b)x+ab}{x}\right)\left(\frac{x^2-(c+d)x+ab}{x}\right) = k,$$

откуда $\left(x+\frac{ab}{x}+(a+b)\right)\left(x+\frac{ab}{x}+(c+d)\right)=k$.

Обозначив $t=x+\frac{ab}{x}$ или $t=x+\frac{ab}{x}+a+b$, получим квадратное уравнение.

Пример 4. Решите уравнение $(x+2)(x+3)(x+8)(x+12)=4x^2$.

Решение. Перемножим первую и последнюю, а также вторую и третью скобки левой части:

$$(x^2+14x+24)(x^2+11x+24) = 4x^2.$$

Заметим, что $x=0$ не является корнем уравнения, и разделим обе части уравнения на x^2 следующим образом:

$$\left(\frac{x^2+14x+24}{x}\right)\left(\frac{x^2+11x+24}{x}\right) = 4.$$

Выполним почленное деление в каждой из скобок левой части последнего уравнения и перегруппируем слагаемые:

$$\left(x+\frac{24}{x}+14\right)\left(x+\frac{24}{x}+11\right) = 4.$$

Теперь можно сделать замену переменной. Пусть $t=x+\frac{24}{x}+14$. Тогда $x+\frac{24}{x}+11=t-3$ и уравнение примет вид $t(t-3)=4$, откуда $t^2-3t-4=0$. Корнями полученного квадратного уравнения являются числа -1 и 4. Сделаем обратную замену. При $t=-1$ получим уравнение $x+\frac{24}{x}+14=-1$, откуда $x^2+15x+24=0$. Корнями последнего уравнения являются числа $\frac{-15-\sqrt{129}}{2}$ и $\frac{-15+\sqrt{129}}{2}$. При $t=4$ получим уравнение $x+\frac{24}{x}+14=4$, откуда $x^2+10x+24=0$. Корнями этого уравнения являются числа -6 и -4.

Ответ: $\frac{-15-\sqrt{129}}{2}$; -6; -4; $\frac{-15+\sqrt{129}}{2}$.

Уравнение вида $a\cdot f^2(x)+b\cdot f(x)\cdot g(x)+c\cdot g^2(x)=0$

Такое уравнение называется однородным уравнением второго порядка. Оно сводится к квадратному уравнению после деления обеих частей на $g^2(x)$ и введения новой переменной $t=\frac{f(x)}{g(x)}$. Следует подчеркнуть, что при делении на $g^2(x)$ может произойти потеря корней уравнения, поэтому обязательной является проверка тех значений x, при которых $g^2(x)=0$. Если эти значения являются корнями исходного уравнения, то их также следует включить в ответ. Другой способ решения однородного уравнения состоит в рассмотрении его как квадратного относительно одной из функций $f(x)$ или $g(x)$.

Пример 5. Решите уравнение

$$x^2(x-1)^2+x(x^2-1) = 2(x+1)^2.$$

Решение. Перепишем уравнение следующим образом:

$$(x^2-x)^2+(x^2-x)(x+1)-2(x+1)^2 = 0.$$

Заметим, что $x=-1$ не является корнем уравнения, и разделим обе части уравнения на $(x+1)^2$. Получим

$$\left(\frac{x^2-x}{x+1}\right)^2+\frac{x^2-x}{x+1}-2 = 0.$$

Сделаем замену переменной. Пусть $t=\frac{x^2-x}{x+1}$. Тогда уравнение примет вид $t^2+t-2=0$. Корнями полученного квадратного уравнения являются числа 1 и -2. Сделаем обратную замену. При $t=1$ получим уравнение $\frac{x^2-x}{x+1}=1$, откуда $x^2-2x-1=0$. Корнями последнего уравнения являются числа $1-\sqrt{2}$ и $1+\sqrt{2}$. При $t=-2$ получим уравнение $\frac{x^2-x}{x+1}=-2$, откуда $x^2+x+2=0$. Это уравнение не имеет корней, так как его дискриминант отрицателен.

Ответ: $1-\sqrt{2}$; $1+\sqrt{2}$.

Уравнение вида $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$, *где* $a\neq 0$

Такое уравнение, коэффициенты которого симметричны относительно середины, называется возвратным уравнением четвертого порядка. К квадратному уравнению его можно свести следующим образом. Вынесем общие множители и перегруппируем слагаемые в левой части уравнения:

$$a(x^4+1)+b(x^3+x)+cx^2=0.$$

Заметим, что $x=0$ не является корнем уравнения (иначе $a=0$, что противоречит условию). Разделив обе части последнего уравнения на x^2, получим

$$a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0.$$

Пусть $t=x+\frac{1}{x}$. Тогда $t^2=x^2+2+\frac{1}{x^2}$, откуда $x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$. Теперь уравнение можно переписать так: $a(t^2-2)+bt+c=0$. Последнее уравнение является квадратным относительно переменной t.

Схожее с рассмотренным уравнение вида

$$ax^4+bx^3+cx^2-bx+a=0$$

можно свести к квадратному аналогичным образом, получив уравнение

$$a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x-\frac{1}{x}\right)+c=0$$

и сделав замену переменной $t=x-\frac{1}{x}$, откуда

$$t^2=x^2-2+\frac{1}{x^2},\quad x^2+\frac{1}{x^2}=t^2+2,$$

и, следовательно, $a(t^2+2)+bt+c=0$.

Пример 6. Решите уравнение $x^4-3x^3+4x^2-3x+1=0$.

Решение. Заметим, что $x=0$ не является корнем уравнения. Разделив обе части последнего уравнения на x^2, перегруппировав слагаемые в левой части и вынеся за скобку общий множитель, получим

$$x^2+\frac{1}{x^2}-3\left(x+\frac{1}{x}\right)+4=0.$$

Пусть $t=x+\frac{1}{x}$. Тогда $t^2=x^2+2+\frac{1}{x^2}$, откуда $x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$. Теперь уравнение можно переписать так: $t^2-2-3t+4=0$, откуда $t^2-3t+2=0$. Корнями полученного квадратного уравнения являются числа 1 и 2. Сделаем обратную замену. При $t=1$ получим уравнение $x+\frac{1}{x}=1$, откуда $x^2-x+1=0$. Это уравнение не имеет корней, так как его дискриминант отрицателен. При $t=2$ получим уравнение $x+\frac{1}{x}=2$, откуда $x^2-2x+1=0$. Единственным корнем последнего уравнения является число 1.

Ответ: 1.

Уравнение вида $(x+a)^4+(x+b)^4=c$

Это уравнение после замены $t=x+\frac{a+b}{2}$ (иногда называемой *симметризацией*) сводится к биквадратному уравнению.

Пример 7. *Решите уравнение* $(x+3)^4+(x+5)^4=16$.

Решение. Обозначим $t=x+4$, тогда уравнение примет вид

$$(t-1)^4+(t+1)^4=16.$$

Поскольку $a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2$, *левую часть полученного уравнения можно преобразовать так:*

$$\left((t-1)^2+(t+1)^2\right)^2-2(t-1)^2(t+1)^2=$$
$$=\left(2t^2+2\right)^2-2(t^2-1)^2=4t^4+8t^2+4-2t^4+4t^2-2=2t^4+12t^2+2.$$

Получим уравнение $2t^4+12t^2+2=16$, откуда $t^4+6t^2-7=0$. Пусть $t^2=z$, $z>0$. Тогда $z^2+6z-7=0$. Единственным положительным корнем последнего уравнения является $z=1$. Поэтому $t^2=1$, откуда $t=-1$ либо $t=1$. Если $t=-1$, то $x+4=-1$, откуда $x=-5$. Если $t=1$, то $x+4=1$, откуда $x=-3$.

Ответ: -5; -3.

3. Применение свойств функций

Некоторые (не обязательно целые) уравнения могут быть решены с помощью таких свойств функций, как монотонность и ограниченность. Рассмотрим соответствующие примеры.

Пример 1. Решите уравнение $x^5+3x^3+8x-12=0$.

Решение. Число 1 является корнем уравнения. Других корней уравнение не имеет, так как функция $y=x^5+3x^3+8x-12$ является монотонно возрастающей на всей числовой прямой (как сумма монотонно возрастающих функций), и, следовательно, каждое свое значение принимает ровно один раз.

Ответ: 1.

Пример 2. Решите уравнение

$$(x^4-2x^2+2)^4+(x^2+2x+5)^2=17.$$

Решение. Выделив полные квадраты в каждой из скобок левой части, перепишем данное уравнение в виде

$$((x^2-1)^2+1)^4+((x+1)^2+4)^2=17.$$

Из неравенств $(x^2-1)^2+1\geqslant 1$ и $(x+1)^2+4\geqslant 4$ следует, что

$$((x^2-1)^2+1)^4\geqslant 1,\quad ((x+1)^2+4)^2\geqslant 16.$$

Поэтому левая часть уравнения не меньше 17. Быть равной 17 она может только в случае, когда каждое из двух последних неравенств обращается в равенство, т. е. если

$$\begin{cases}(x^2-1)^2+1=1,\\(x+1)^2+4=4.\end{cases}$$

Единственным решением полученной системы является корень $x=-1$.

Ответ: -1.

4. Уравнения, содержащие переменную под знаком абсолютной величины (модуля)

Часто такие уравнения называют короче: уравнения с модулем. Уравнения, содержащие модуль, обычно относят к сравнительно трудным, хотя значительная часть таких уравнений с успехом решается с помощью стандартных равносильных преобразований или «раскрытия модуля» в соответствии с его определением. Приведем сначала основные факты, связанные с модулем и необходимые для решения уравнений.

1. $|a|=a$, если $a\geqslant 0$; $|a|=-a$, если $a<0$ (определение модуля).

2. $|a-b|$ есть расстояние между точками a и b числовой прямой; $|a|=|a-0|$ — расстояние между точками a и 0 числовой прямой; $|a+b|=|a-(-b)|$ — расстояние между точками a и $(-b)$ числовой прямой (геометрический смысл модуля).

3. $|-a|=|a|$.

4. $|ab|=|a||b|$; $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}$.

5. $|a|^2=a^2$.

6. $|a|=|b| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=b,\\a=-b.\end{array}\right.$

7. $|a|=b \Leftrightarrow \begin{cases}b\geqslant 0,\\ \left[\begin{array}{l}a=b,\\a=-b.\end{array}\right.\end{cases}$

8. $|a|+|b|\geqslant|a+b|$, причем $|a|+|b|=|a+b| \Leftrightarrow ab\geqslant 0$.

Эти свойства позволяют решать самые разные по уровню сложности уравнения с модулем. Основными методами решения таких уравнений являются равносильные преобразования (свойства 6—8) и раскрытие модуля по определению (метод промежутков, или метод интервалов). Реже используют геометрический смысл модуля и замену переменной.

Равносильные преобразования

Пожалуй, наиболее эффективный метод решения уравнений с модулем основан на применении равносильных преобразований. Одно из них связано со следующим утверждением: *если обе части уравнения неотрицательны на некотором множестве, то возведение в квадрат обеих частей такого уравнения не приводит ни к потере, ни к приобретению решений на этом множестве, то есть является равносильным преобразованием.* Так, если $g(x) < 0$, то уравнение $|f(x)| = g(x)$ не имеет решений, а в противном случае возведение в квадрат обеих частей такого уравнения является равносильным преобразованием. Поэтому получаем (напомним, что квадрат модуля числа равен квадрату самого числа: $|a|^2 = a^2$)

$$|f(x)| = g(x) \iff \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f^2(x) = g^2(x) \end{cases} \iff \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x)), \end{array}\right. \end{cases}$$

далее уравнения нужно решить, а неравенство проверить.

Какой способ — метод промежутков (интервалов) или указанное преобразование — выбирать для решения таких уравнений, зависит от того, какая из функций $f(x)$ или $g(x)$ имеет более простой вид.

Аналогичным образом обстоит дело с уравнением вида $|p(x)| = |q(x)|$. Это уравнение в силу приведенного утверждения равносильно уравнению $p^2(x) = q^2(x)$, откуда:

$$\left[\begin{array}{l} p(x) = q(x), \\ p(x) = -q(x). \end{array}\right.$$

Заметим, что последнюю совокупность можно получить, не возводя обе части уравнения $|p(x)| = |q(x)|$ в квадрат, а непосредственно из свойств модуля.

Приведенные схемы решения можно получить из «геометрических» соображений. Напомним, что модуль разности двух чисел равен расстоянию между точками числовой (координатной) прямой, соответствующими этим числам (в этом, собственно, и заключается геометрический смысл модуля).

Решить уравнение $|x-b|=a$ — значит найти все точки x числовой оси, расстояние от каждой из которых до числа b равно a. Понятно, что если $a>0$, то $x=b\pm a$, если $a=0$, то $x=b$, если $a<0$, то решений нет. Решение уравнения $|f(x)|=a$ при $a>0$ сводится к рассмотренному случаю после замены переменной $f(x)=t$. При решении конкретных примеров такую замену можно не делать и сразу переходить к уравнениям $f(x)=a$; $f(x)=-a$.

Сходно с рассмотренным и решение уравнения $|f(x)|=g(x)$. Действительно, если $g(x)<0$, то уравнение не имеет решений в силу неотрицательности модуля; если $g(x)\geqslant 0$, получаем, что

$$f(x)=g(x) \quad \text{либо} \quad f(x)=-g(x).$$

Таким образом,

$$|f(x)|=g(x) \iff \begin{cases} g(x)\geqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} f(x)=g(x), \\ f(x)=-g(x). \end{array}\right. \end{cases}$$

Кроме того, полезно обратить внимание на следующие свойства модуля, непосредственно следующие из его определения:

$$\begin{aligned} |f(x)|&=f(x) &&\iff f(x)\geqslant 0, \\ |f(x)|&=-f(x) &&\iff f(x)\leqslant 0. \end{aligned}$$

Перейдем к решению примеров, начав с **задачи 2 части I** вводной диагностической работы.

Пример 1. Решите уравнение $|x^2-9|+|x+3|=x^2+x-6$.

Решение. Заметим, что данное уравнение представляет собой уравнение вида

$$|a|+|b|=a+b \iff \begin{cases} a\geqslant 0, \\ b\geqslant 0. \end{cases}$$

В данном случае

$$a=x^2-9, \quad b=x+3, \quad a+b=x^2+x-6,$$

откуда $\begin{cases} x^2-9\geqslant 0, \\ x+3\geqslant 0, \end{cases}$ и, значит, $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\geqslant 3, \\ x\leqslant -3, \end{array}\right. \\ x\geqslant -3. \end{cases}$ Решениями системы являются число -3 и луч $[3;+\infty)$.

Ответ: -3; $[3;+\infty)$.

Пример 2. Решите уравнение $|x^3+x-1|=x+1$.

Решение. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x+1 \geqslant 0, \\ \left[\begin{aligned} &x^3+x-1 = x+1, \\ &x^3+x-1 = -x-1, \end{aligned}\right. \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} x \geqslant -1, \\ \left[\begin{aligned} &x = \sqrt[3]{2}, \\ &x(x^2+2) = 0. \end{aligned}\right. \end{cases}$$

Решениями последней системы являются числа 0 и $\sqrt[3]{2}$.

Ответ: 0; $\sqrt[3]{2}$.

Пример 3. Решите уравнение $||3-2x|-1|=2|x|$.

Решение. Поскольку обе части уравнения неотрицательны, возведение их в квадрат является равносильным преобразованием. Применим это преобразование, учитывая, что квадрат модуля числа равен квадрату этого числа: $(|3-2x|-1)^2=4x^2$. Раскроем скобки: $(3-2x)^2-2|3-2x|+1=4x^2$, откуда $9-12x+4x^2-2|3-2x|+1=4x^2$, и, значит, $|3-2x|=5-6x$. Перейдем к равносильной системе

$$\begin{cases} 5-6x \geqslant 0, \\ \left[\begin{aligned} &3-2x = 5-6x, \\ &3-2x = -5+6x, \end{aligned}\right. \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} x \leqslant \dfrac{5}{6}, \\ \left[\begin{aligned} &x = 0{,}5, \\ &x = 1. \end{aligned}\right. \end{cases}$$

Неравенству системы удовлетворяет только $x=0{,}5$.

Ответ: 0,5.

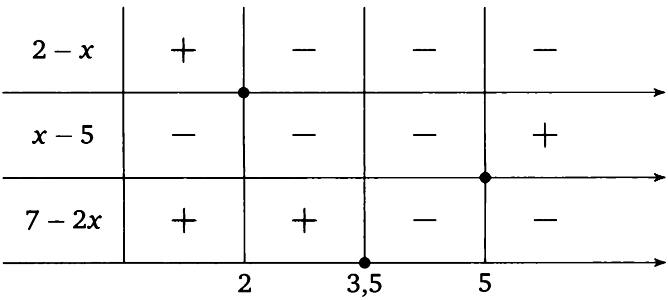
Метод промежутков (интервалов)

Одним из наиболее известных методов решения уравнений с модулем является метод промежутков (интервалов). Суть метода заключается в следующем. Числовая ось (в этом параграфе рассматриваются только целые уравнения, поэтому никакие ограничения на переменную не вводятся) разбивается на несколько интервалов точками, в которых выражения, содержащие неизвестную под знаком модуля, обращаются в нуль. На любом из этих интервалов любое из таких выражений определено и не равно нулю, следовательно, оно принимает только положительные или только отрицательные значения (какие именно, можно определить, выбрав любое значение из рассматриваемого промежутка и определив знак выражения при этом значении). Поэтому в зависимости от промежутка модуль каждого из таких выражений «раскрывается» либо со знаком «плюс», либо со знаком «минус». Затем на каждом промежутке находится решение данного уравнения, уже не содержащего знаков модуля. Последний шаг — объединение найденных решений. Заметим, что решать неравенства вовсе не обязательно: достаточно найти корни полученных уравнений и проверить, какие из них удовлетворяют соответствующему неравенству. Этот метод целесообразно применять, в основном, если уравнение содержит два и более модуля, а выражения под знаками модулей являются многочленами первой степени. В большинстве же случаев более эффективным является применение равносильных преобразований.

Пример 4. Решите уравнение

$$|2-x|-|x-5|=x+1-|7-2x|.$$

Решение. Определим промежутки знакопостоянства каждого из выражений под знаками модуля, для наглядности и удобства изобразив их на одной схеме (жирными точками отмечены нули соответствующих выражений). Рассмотрим 4 случая, «раскрывая» модули согласно знакам в каждом из столбцов.



1) $\begin{cases} x \geqslant 5, \\ -2+x-x+5 = x+1+7-2x, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} x \geqslant 5, \\ x = 5, \end{cases}$ и, значит, $x = 5$.

2) $\begin{cases} 3{,}5 \leqslant x < 5, \\ -2+x+x-5 = x+1+7-2x, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} 3{,}5 \leqslant x < 5, \\ x = 5. \end{cases}$ Решений нет.

3) $\begin{cases} 2 \leqslant x < 3{,}5, \\ -2+x+x-5 = x+1-7+2x, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} 2 \leqslant x < 3{,}5, \\ x = -1. \end{cases}$ Решений нет.

4) $\begin{cases} x < 2, \\ 2-x+x-5 = x+1-7+2x, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} x < 2, \\ x = 1, \end{cases}$ и, значит, $x = 1$.

Ответ: 1; 5.

Замена переменной

Еще один метод решения уравнений с модулем основан на замене переменной и тождестве $|a|^2 = a^2$. Как уже отмечалось, задач, в которых его целесообразно использовать, не так много, причем часть из них можно решить и другими способами.

Пример 5. Решите уравнение $(x-1)^2 - 3|x-1| - 4 = 0$.

Решение. Сделав замену переменной $t = |x-1|$ $(t \geqslant 0)$, получим квадратное уравнение $t^2 - 3t - 4 = 0$, единственным неотрицательным корнем которого является $t = 4$, откуда $|x-1| = 4$, и, значит, $x = -3$, $x = 5$.

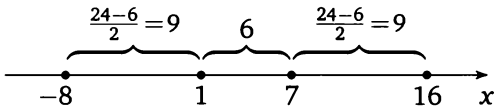
Ответ: -3; 5.

Применение геометрического смысла модуля

Рассмотрим уравнение вида $|x-b| + |x-c| = a$, при решении которого использование геометрического смысла модуля достаточно эффективно. Решить уравнение $|x-b| + |x-c| = a$ — значит найти все точки x числовой оси, сумма расстояний от каждой из которых до точек b и c равна a. Если расстояние между точками b и c больше a, то уравнение не имеет решений. В самом деле, если предположить, что искомая точка принадлежит отрезку с концами b и c, то сумма расстояний от такой точки до концов отрезка окажется больше a (поскольку длина этого отрезка больше a), а для любой точки, лежащей вне рассматриваемого отрезка, сумма расстояний будет еще больше. Если расстояние между точками b и c равно a, то любая точка отрезка с концами b и c будет решением данного уравнения. Если же расстояние между точками b и c меньше a, то для любой точки отрезка с концами b и c сумма расстояний до точек b и c будет меньше a. Таким образом, искомая точка должна лежать вне отрезка с концами b и c. В этом случае сумма расстояний от искомой точки до точек b и c будет складываться из длины отрезка с концами b и c и удвоенного расстояния от этой точки до ближайшего к ней конца отрезка. Это рассуждение и позволяет найти искомые значения переменной. При освоении метода решение подобных уравнений осуществляется почти мгновенно. Для этого нужно изобразить числовую ось, отметить на ней «ключевые» точки b и c и расстояние между ними.

Пример 6. Решите уравнение $|x-1| + |x-7| = 24$.

Решение. Для того чтобы решить уравнение, найдем все точки x числовой оси, сумма расстояний от каждой из которых до точек 1 и 7 равна 24. Понятно, что на отрезке $[1; 7]$ искомых точек быть не может, поскольку сумма расстояний от любой точки отрезка до его концов равна длине отрезка, т. е. в данном случае равна 6. Значит, искомые точки лежат вне отрезка. Рассмотрим точку, лежащую правее точки 7 на числовой оси. Сумма расстояний от этой точки до концов отрезка складывается из длины отрезка и удвоенного расстояния от этой точки до точки 7. Таким образом, это удвоенное расстояние равно $24-6=18$, и искомая точка находится правее точки 7 на $18:2=9$ единиц. Следовательно, первая из искомых точек: $x=16$. Абсолютно аналогично получаем, что вторая искомая точка находится на числовой оси левее точки 1 на 9 единиц. Следовательно, второе решение уравнения: $x=-8$.



Ответ: -8; 16.

Целые алгебраические уравнения

1. Решите уравнение

а) $x^2+8=(x+8)^2$, б) $y^2+5=(y+5)^2$.

2. Решите уравнение

а) $(x+10)^2=x^2+100$, б) $(z-11)^2=z^2+121$.

3. Решите уравнение

а) $x^2-36=(x-6)^2$, б) $y^2-196=(y-14)^2$.

4. Решите уравнение

а) $(x+9)^2=36x$, б) $(z-18)^2=-72z$.

5. Решите уравнение

а) $\frac{7}{8}x=7\frac{7}{8}$, б) $\frac{5}{9}x=5\frac{5}{9}$.

6. Решите уравнение

а) $(x-17)^2=5(x-17)$, б) $(y+21)^2=5(y+21)$.

7. Решите уравнение

а) $\frac{2}{5}x^2=6\frac{2}{5}$, б) $\frac{6}{7}y^2=7\frac{5}{7}$.

8. Решите уравнение

а) $(2x-5)^2=(2x-7)^2$, б) $(3z+4)^2=(3z+2)^2$.

9. Решите уравнение

а) $(5x-9)^2=(5x-9)^3$, б) $(5x+6)^2=(5x+6)^3$.

10. Решите уравнение

а) $9x^3=36x$, б) $3z^3=75z$.

11. Решите уравнение

а) $(x-2)^2(x-3)=4(x-2)$, б) $(x+2)^2(x+4)=3(x+2)$.

12. Решите уравнение

а) $(x-2)(x-3)(x-4)=(x-2)(x-3)(x-5)$,

б) $(x+8)(x-2)(x+7)=(x+8)(x-2)(x-3)$.

13. Решите уравнение

а) $(x+8)^3=36(x+8)$, б) $(y-1)^3=25(y-1)$.

14. Решите уравнение

а) $(3x+2)^4=(3x+4)^4$, б) $(4y-1)^6=(4y+9)^6$.

15. Решите уравнение

а) $(2x-3)^2(x-3)=(2x-3)(x-3)^2$,

б) $(5y+9)^2(y+9)=(5y+9)(y+9)^2$.

16. Решите уравнение

а) $x^4-5x^2+4=0$, б) $y^4-20y^2+64=0$.

17. Решите уравнение

а) $x^6=(5x-4)^3$, б) $y^{10}=(2y+15)^5$.

18. Решите уравнение

а) $|5x-7|=7-5x$, б) $|7y+3|=-3-7y$.

19. Решите уравнение

а) $|2x-3|=3x-2$, б) $|7x+9|=9x+7$.

20. Решите уравнение

а) $|x^2-3|=|x^2-5|$, б) $|z^2+2|=|z^2-4|$.

21. Уравнение

а) $(x-2)(x^2-4x+3)=(x-3)(x^2-3x+2)$,

б) $(x-6)(x^2-2x-8)=(x+2)(x^2-10x+24)$

1) не имеет корней; 2) имеет 1 корень; 3) имеет 2 различных корня; 4) имеет 3 различных корня; 5) имеет бесконечно много корней. Укажите номер истинного утверждения.

22. Какие из уравнений не имеют положительных корней:

а) 1) $x^2-2009x-3=0$; 2) $x^2-3x+2009=0$;
3) $x^2-2009x+3=0$; 4) $x^2-3x-2009=0$?

б) 1) $x^2-2007x-9=0$; 2) $x^2-9x+2007=0$;
3) $x^2-2007x+9=0$; 4) $x^2-9x-2007=0$?

23. Укажите номера тех уравнений, которые не имеют отрицательных корней:

а) 1) $x^2-10x+30=0$; 2) $x^4-9x+11=0$;
3) $x^3-7x^2-5=0$; 4) $x^2-5x-29=0$.

б) 1) $x^2-10x+29=0$; 2) $x^4-9x+9=0$;
3) $x^3-7x^2-4=0$; 4) $x^2-5x-28=0$.

24. Какие из утверждений о корнях уравнения

а) $x^3-1935x^2-1539=0$, б) $x^3-9345x^2-9543=0$

истинны: 1) уравнение имеет по крайней мере один отрицательный корень; 2) уравнение имеет не менее двух отрицательных корней; 3) уравнение не имеет отрицательных корней; 4) все корни уравнения отрицательны?

25. Какие из утверждений о корнях уравнения

а) $x^4-5x^2-2011=0$, б) $x^6-3x^3-1617=0$

истинны:

1) один из корней уравнения — четное число; 2) один из корней уравнения — нечетное число; 3) уравнение не имеет ни четных, ни нечетных корней; 4) уравнение имеет по крайней мере один четный и один нечетный корни?

Тренировочная работа 1

Решите уравнение.

1. $(x^2-x)^2-18(x^2-x-2)+36=0.$

2. $(x+2)(x+4)(x+6)(x+8)=105.$

3. $(x^2+x+16)(x^2-20x+16)+54x^2=0.$

4. $4x^2(2x+1)^2-2x(4x^2-1)=30(2x-1)^2.$

5. $x^4-4x^3+6x^2-4x+1=0.$

6. $(x-5)^{10}+(2x-9)^5=0.$

7. $3x^3-13x^2+13x-3=0.$

8. $x^4-4x^3+4x^2-64=0.$

9. $3x^3-2x^2-12x+8=0.$

10. $x^7+7x-8=0.$

11. $(x^4-8x^2+18)^4+(x^2+4x+7)^2=13.$

12. Найдите все пары $(x; y)$ чисел x и y, для каждой из которых
$+2xy+2y^2-10x-14y+29=0.$

Тренировочная работа 2

Решите уравнение.

1. $|5x-3|+|3x-5|=9x-10$.

2. $|2x-1|-|3x-2|-|4x-3|+11=10x$.

3. $|x^2-6x+1|=x^2-9$.

4. $|x^3+5x-4|=5x+4$.

5. $2(x-3)^2-5|x-3|+2=0$.

6. $5(2x-1)^2-7|2x-1|-6=0$.

7. $|||5x-1|-2|-3|=4$.

8. $|x^2-10|=|x^2-22|$.

9. $|x^2-x-5|+|x^2-x-9|=10$.

10. $|x^2+3x-4|+|x^2+3x-28|=24$.

11. $|x^2-16|+|x+4|=x^2+x-12$.

12. $|x^2+x-20|+|x^2-11x-28|=2|x^2-5x-24|$.

§ 2. Дробно-рациональные уравнения

Этот параграф посвящен рациональным уравнениям. Поскольку целые уравнения тоже являются рациональными, то часто, чтобы не возникло путаницы, вместо словосочетания «рациональные уравнения» используют словосочетание «дробно-рациональные уравнения». Мы будем использовать оба словосочетания. Основная идея решения любого вообще, в том числе и дробно-рационального, уравнения — све́дение его к одному или нескольким простейшим. Напомним, что для дробно-рациональных уравнений под простейшими понимаются уравнения вида $\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$, где $f(x)$ и $g(x)$ — многочлены первой или второй степени. Эти уравнения решаются с помощью условия равенства алгебраической дроби нулю: дробь равна нулю, если ее числитель равен нулю, а знаменатель имеет смысл и не обращается в нуль.

Решение многих рациональных уравнений основано на удачной группировке и последующем приведении сгруппированных слагаемых к общему знаменателю. В более простых случаях группировка не требуется, а иногда уравнение можно упростить, введя новую переменную. При решении рациональных уравнений возникает опасность получения посторонних решений, поэтому либо следует делать проверку, либо указывать необходимые ограничения и следить за их выполнением в ходе решения. Разумеется, при решении рациональных уравнений используются и такие общие методы решения уравнений, как замена переменной, разложение на множители, использование свойств монотонности и ограниченности функций и т. п.

1. Алгебраические преобразования

Одним из основных способов сведения уравнения к одному или нескольким простейшим являются алгебраические преобразования одной или обеих его частей, позволяющие свести дробно-рациональное уравнение к целому. В некоторых случаях для решения рациональных уравнений приходится применять искусственные приемы: добавление и вычитание одного и того же числа и т. п.

Условие равенства дроби нулю

В качестве первого примера рассмотрим решение **уравнения 3 части I** вводной диагностической работы.

Пример 1. Решите уравнение

$$\frac{x^7-4x^5+4x^2-7x-2}{x^7-4x^5+3x^2-4x-4}=1.$$

Решение. Дробь равна нулю, если ее числитель равен нулю, а знаменатель имеет смысл и не обращается в нуль. Перейдем к соответствующей системе:

$$\frac{x^7-4x^5+4x^2-7x-2}{x^7-4x^5+3x^2-4x-4}=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^7-4x^5+4x^2-7x-2=x^7-4x^5+3x^2-4x-4, \\ x^7-4x^5+3x^2-4x-4\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x+2=0, \\ x^7-4x^5+3x^2-4x-4\neq 0. \end{cases}$$

Корнями уравнения $x^2-3x+2=0$ являются $x=1$ и $x=2$. С помощью проверки устанавливаем, что неравенству $x^7-4x^5+3x^2-4x-4\neq 0$ удовлетворяет только $x=1$.

Ответ: 1.

Равносильные преобразования

В качестве первого примера рассмотрим решение **уравнения 4 части I** вводной диагностической работы.

Пример 2. Решите уравнение $\frac{2}{x^2-2x-3}+\frac{x-5}{x^2-1}=\frac{1}{x^2-4x+3}$.

Решение. Разложим квадратные трехчлены в знаменателях дробей на множители. Корнями уравнения $x^2-2x-3=0$ являются $x=-1$ и $x=3$. Следовательно, по теореме о разложении квадратного трехчлена на множители получаем, что $x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$. По формуле разности квадратов $x^2-1=(x-1)(x+1)$. Корнями уравнения $x^2-4x+3=0$ являются $x=1$ и $x=3$. Следовательно, по теореме о разложении квадратного трехчлена на множители

$$x^2-4x+3=(x-1)(x-3).$$

Теперь уравнение можно переписать в виде

$$\frac{2}{(x+1)(x-3)}+\frac{x-5}{(x-1)(x+1)}=\frac{1}{(x-1)(x-3)}.$$

Перенесем все слагаемые в левую часть и приведем их к общему знаменателю:

$$\frac{2}{(x+1)(x-3)}+\frac{x-5}{(x-1)(x+1)}=\frac{1}{(x-1)(x-3)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(x-1)+(x-5)(x-3)-(x+1)}{(x+1)(x-3)(x-1)}=0.$$

Раскроем скобки в числителе, приведем подобные и воспользуемся условием обращения дроби в нуль:

$$\frac{2(x-1)+(x-5)(x-3)-(x+1)}{(x+1)(x-3)(x-1)}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-2+x^2-3x-5x+15-x-1}{(x+1)(x-3)(x-1)}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-7x+12}{(x+1)(x-3)(x-1)}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-7x+12=0, \\ (x-1)(x+1)(x-3)\neq 0. \end{cases}$$

Корнями уравнения $x^2-7x+12=0$ являются $x=3$ и $x=4$. Неравенству системы удовлетворяет только $x=4$.

Ответ: $x=4$.

Переход к уравнению-следствию

Пример 3. Решите уравнение $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x^2}}}=4x.$

Решение. В данном случае нецелесообразно тратить время на выписывание условий существования левой части уравнения. Проще преобразовать ее, найти корни и выполнить проверку. Выполним преобразования левой части уравнения:

$$\frac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x^2}}}=\frac{1}{1-\dfrac{1}{\dfrac{1-x^2-1}{1-x^2}}}=\frac{1}{1+\dfrac{1}{\dfrac{x^2}{1-x^2}}}=$$

$$=\frac{1}{1+\dfrac{1-x^2}{x^2}}=\frac{1}{\dfrac{x^2+1-x^2}{x^2}}=\frac{1}{\dfrac{1}{x^2}}=x^2.$$

Перейдем к уравнению-следствию: $x^2=4x$, откуда $x^2-4x=0$, $x(x-4)=0$, и, значит, $x=0$ либо $x=4$. Проверкой убеждаемся, что корень $x=0$ является посторонним (при $x=0$ левая часть уравнения не определена).

Ответ: $x=4$.

Разложение на множители

Пример 4. Решите уравнение $\dfrac{x^2}{x-4}+2\cdot\dfrac{x}{x^2-4}+3=0.$

Решение. Перегруппируем слагаемые, представив 3 в виде суммы $1+2$, и сложим первую дробь с 1, а вторую — с 2:

$$\frac{x^2}{x-4}+\frac{x}{x^2-4}+3=0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x-4}+1+2\cdot\frac{x}{x^2-4}+2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+x-4}{x-4}+2\cdot\left(\frac{x}{x^2-4}+1\right)=0 \Leftrightarrow \frac{x^2+x-4}{x-4}+2\cdot\frac{x^2+x-4}{x^2-4}=0.$$

Вынесем за скобку общий множитель и приведем дроби в скобках к общему знаменателю:

$$\frac{x^2+x-4}{x-4}+2\cdot\frac{x^2+x-4}{x^2-4}=0 \Leftrightarrow (x^2+x-4)\left(\frac{1}{x-4}+\frac{2}{x^2-4}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2+x-4)\left(\frac{1}{x-4}+\frac{2}{x^2-4}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2+x-4)\cdot\frac{x^2-4+2x-8}{(x-4)(x^2-4)}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x^2+x-4)(x^2+2x-12)}{(x-4)(x^2-4)}=0.$$

Воспользуемся условием обращения дроби в нуль:

$$\frac{(x^2+x-4)(x^2+2x-12)}{(x-4)(x^2-4)}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+x-4)(x^2+2x-12)=0, \\ (x-4)(x^2-4)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x^2+x-4=0, \\ x^2+2x-12=0, \end{array}\right. \\ (x-4)(x^2-4)\neq 0. \end{cases}$$

Корнями уравнения $x^2+x-4=0$ являются $x=\frac{-1-\sqrt{17}}{2}$ и $x=$ $=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$. Корнями уравнения $x^2+2x-12=0$ являются $x=-1-\sqrt{13}$ и $x=-1+\sqrt{13}$. Неравенству системы удовлетворяют все четыре корня.

Ответ: $\frac{-1-\sqrt{17}}{2}$; $\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$; $-1-\sqrt{13}$; $-1+\sqrt{13}$.

2. Замена переменной

Сведение дробно-рационального уравнения к одному или нескольким простейшим с помощью замены переменной является одним из самых распространенных способов их решения. Здесь, как и в случае целых уравнений, приходится иметь дело с самыми разными типами уравнений: трехчленными, однородными и т. п.

Пример 1. Решите уравнение $\left(\frac{2x}{x+1}\right)^4+5\left(\frac{2x}{x+1}\right)^2-36=0$.

Решение. Пусть $\left(\frac{2x}{x+1}\right)^2=t$. Тогда $t\geqslant 0$ и уравнение примет вид $t^2+5t-36=0$. Корнями последнего уравнения являются числа $t=-9$ и $t=4$, из которых только последнее удовлетворяет условию $t\geqslant 0$. Итак, $t=4$. Сделаем обратную замену: $\left(\frac{2x}{x+1}\right)^2=4$, откуда $\frac{2x}{x+1}=2$, либо $\frac{2x}{x+1}=-2$. Уравнение $\frac{2x}{x+1}=2$ корней не имеет, а единственным корнем уравнения $\frac{2x}{x+1}=-2$ является $x=-0{,}5$.

Ответ: $-0{,}5$.

Пример 2. Решите уравнение $\frac{x^2+3x+2}{x^2-x+2}+\frac{x}{x^2-2x+2}=1$.

Решение. 1. Проверка показывает, что число $x=0$ является корнем уравнения.

2. Пусть $x\neq 0$. Разделим числитель и знаменатель каждой дроби на x. Уравнение примет вид: $\dfrac{x+3+\frac{2}{x}}{x-1+\frac{2}{x}}+\dfrac{1}{x-2+\frac{2}{x}}=1$. Обозначим: $z=x+\frac{2}{x}-2$. Получим уравнение $\frac{z+5}{z+1}+\frac{1}{z}=1$. Перенесем все слагаемые в левую часть уравнения, приведем их к общему знаменателю, выполним необходимые преобразования и решим уравнение:

$$\frac{z+5}{z+1}+\frac{1}{z}=1 \Leftrightarrow \frac{(z+5)z}{(z+1)z}+\frac{z+1}{z(z+1)}-\frac{z(z+1)}{z(z+1)}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{z^2+5z+z+1-z^2-z}{z(z+1)}=0 \Leftrightarrow \frac{5z+1}{z(z+1)}=0 \Leftrightarrow z=-\frac{1}{5}.$$

Вернемся к прежней переменной:

$$x+\frac{2}{x}-2=-\frac{1}{5} \Leftrightarrow x+\frac{2}{x}-\frac{9}{5}=0 \Leftrightarrow 5x^2-9x+10=0.$$

Дискриминант уравнения $5x^2-9x+10=0$ меньше нуля, поэтому уравнение не имеет ни одного корня. Итак, ни одно число $x\neq 0$ не является корнем уравнения.

Ответ: 0.

Пример 3. Решите уравнение

$$\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^2+14\cdot\frac{x^2-9}{x^2-1}-15\left(\frac{x-3}{x+1}\right)^2=0.$$

Решение. 1. Число $x=3$ не является корнем уравнения.

2. Пусть $x\neq 3$. Обозначим $a=\dfrac{x+3}{x-1}$, $b=\dfrac{x-3}{x+1}$. Получим уравнение $a^2+14ab-15b^2=0$. Поскольку $x\neq 3$, то $b\neq 0$. В силу того, что $b\neq 0$, можно разделить обе части уравнения $a^2+14ab-15b^2=0$ на b^2: $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2+14\cdot\dfrac{a}{b}-15=0$. Обозначив $z=\dfrac{a}{b}$, получим уравнение $z^2+14z-15=0$, корни которого: $\left[\begin{array}{l} z=1, \\ z=-15. \end{array}\right.$

3. Вернемся к переменной x: $\left[\begin{array}{l} \dfrac{(x+3)(x+1)}{(x-1)(x-3)}=1, \\ \dfrac{(x+3)(x+1)}{(x-1)(x-3)}=-15. \end{array}\right.$

Решим уравнение $\dfrac{(x+3)(x+1)}{(x-1)(x-3)}=1$:

$$\frac{(x+3)(x+1)}{(x-1)(x-3)}=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+4x+3=x^2-4x+3, \\ (x-1)(x-3)\neq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=0.$$

Решим уравнение $\dfrac{(x+3)(x+1)}{(x-1)(x-3)}=-15$:

$$\frac{(x+3)(x+1)}{(x-1)(x-3)}=-15 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+4x+3=-15x^2+60x-45, \\ (x-1)(x-3)\neq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2-7x+6=0, \\ (x-1)(x-3)\neq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3}{2}, \\ x=2. \end{array}\right.$$

Ответ: 0; $\dfrac{3}{2}$; 2.

Пример 4. Решите уравнение $x^2+\dfrac{4x^2}{(x+2)^2}=5$.

Решение. Левая часть уравнения представляет собой сумму квадратов чисел x и $\dfrac{2x}{x+2}$. Попробуем дополнить эту сумму до квадрата разности, вычтя из нее и добавив к ней (чтобы выражение не изменилось) удвоенное произведение этих чисел $2x\cdot\dfrac{2x}{x+2}$. Получим

$$x^2-2x\cdot\frac{2x}{x+2}+\frac{4x^2}{(x+2)^2}+2x\cdot\frac{2x}{x+2}=5.$$

Далее, $\left(x-\dfrac{2x}{x+2}\right)^2+2x\cdot\dfrac{2x}{x+2}=5$, откуда

$$\left(\frac{x^2+2x-2x}{x+2}\right)^2+4\cdot\frac{x^2}{x+2}=5,$$

и, следовательно,

$$\left(\frac{x^2}{x+2}\right)^2+4\cdot\frac{x^2}{x+2}-5=0.$$

Теперь можно сделать замену переменной. Пусть $\frac{x^2}{x+2}=t$. Тогда $t^2+4t-5=0$, откуда $t=1$ либо $t=5$. Если $t=1$, то $\frac{x^2}{x+2}=1$, и $x^2-x-2=0$. Корнями последнего уравнения являются $x=-1$ и $x=2$. Если $t=-5$, то $\frac{x^2}{x+2}=-5$, и $x^2+5x+10=0$. Полученное уравнение не имеет корней в силу отрицательности дискриминанта.

Ответ: -1; 2.

3. Применение свойств функций

Рассмотрим примеры применения свойств функций к решению дробно-рациональных уравнений.

Пример 1. Решите уравнение $x^7+2x=\frac{3}{x}$.

Решение. На каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$ функция $f(x)=x^7+2x$ возрастает (как сумма возрастающих функций), а функция $g(x)=\frac{3}{x}$ убывает. Значит, на каждом из этих промежутков уравнение $f(x)=g(x)$ имеет не более одного корня. Поскольку $f(1)=g(1)$, получаем, что $x=1$ — единственный корень на промежутке $(0; +\infty)$. Поскольку $f(-1)=g(-1)$, получаем, что $x=-1$ — единственный корень на промежутке $(-\infty; 0)$.

Ответ: -1; 1.

Пример 2. Решите уравнение

$$\frac{1}{(x^2-2x)^2+1}+\frac{2}{(x-2)^2+2}+\frac{3}{(x^2-3x+2)^2+3}=3.$$

Решение. Из неравенств $(x^2-2x)^2+1\geqslant 1$, $(x-2)^2+2\geqslant 2$ и $(x^2-$ $-3x+2)^2+3\geqslant 3$ следует, что каждая из трех дробей левой части не больше 1. Поэтому их сумма равняться 3 может только в случае, когда каждая из них равна 1, т. е. если

$$\begin{cases}(x^2-2x)^2+1=1,\\(x-2)^2+2=2,\\(x^2-3x+2)^2+3=3.\end{cases}$$

Единственным корнем второго уравнения системы является $x=2$. Это число, как легко проверить, является корнем первого и третьего уравнения системы.

Ответ: 2.

Пример 3. Найдите корни уравнения $f(x)=2$, если $x\neq 0$ и $3f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=8x$.

Решение. Заменив x на $\frac{1}{x}$ в равенстве $3f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=8x$, получим $3f\left(\frac{1}{x}\right)+f(x)=\frac{8}{x}$. Умножив обе части данного равенства $3f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=8x$ на число 3 и вычтя из полученного равенства почленно равенство $3f\left(\frac{1}{x}\right)+f(x)=\frac{8}{x}$, находим: $8f(x)=24x-\frac{8}{x}$, откуда $f(x)=3x-\frac{1}{x}$. Теперь осталось решить уравнение $3x-\frac{1}{x}=2$, откуда $3x^2-2x-1=0$. Корнями последнего уравнения являются числа $x=-\frac{1}{3}$ и $x=1$.

Ответ: $-\frac{1}{3}$; 1.

Дробно-рациональные уравнения

Решите уравнение.

1. а) $\frac{3}{7x}=\frac{7x}{3}$, б) $\frac{8}{5z}=\frac{5z}{8}$.

2. а) $x^2=\frac{x^2-4}{x-2}$, б) $x^2+2x-25=\frac{x^2-25}{x-5}$.

3. а) $(x-5)(x+7)=\frac{x-5}{x+7}$, б) $(y-7)(y-3)=\frac{y-7}{y-3}$.

4. а) $\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}-30=0$, б) $\frac{1}{z^2}+2\frac{1}{z}-8=0$.

5. а) $\frac{x^2-2x-3}{x-3}=x^2-5$, б) $\frac{z^2-5z+6}{z-3}=z^2-32$.

6. а) $\frac{(2x+3)^2}{x-1}=\frac{25}{x-1}$, б) $\frac{(4x-9)^2}{x-4}=\frac{49}{x-4}$.

7. а) $\frac{x-2}{x^2}=\frac{x-2}{4x}$, б) $\frac{x+5}{x^2}=\frac{x+5}{8x}$.

8. а) $4x+\frac{3}{x}=\frac{4x+3}{x}$, б) $5z-\frac{2}{z}=\frac{5z-2}{z}$.

9. а) $\frac{x^2}{x-6}=\frac{36}{x-6}$, б) $\frac{z^2}{z+8}=\frac{64}{z+8}$.

10. а) $\frac{x-4}{2x+3}=\frac{x-4}{3x+2}$, б) $\frac{z+5}{6z+7}=\frac{z+5}{7z+6}$.

11. а) $\frac{x^2-16}{x^2-5x+4}=0$, б) $\frac{z^2-1}{z^2+5z-6}=0$.

12. а) $\frac{(x-2)(x-3)(x+11)}{x^2+9x-22}=0$, б) $\frac{(y-4)(y-5)(y+9)}{y^2-9y+20}=0$.

13. а) $\frac{(x-2)(x-3)}{x-4}=\frac{2}{x-4}$, б) $\frac{(y+4)(y+3)}{y-1}=\frac{20}{y-1}$.

14. а) $\frac{(x-8)(x^2-49)}{x-8}=15$, б) $\frac{(x+5)(x^2-20)}{x+5}=5$.

15. а) $\frac{(2x+3)^2}{x-1}=\frac{25}{x-1}$, б) $\frac{(3y-8)^2}{y+1}=\frac{(8y-3)^2}{y+1}$.

16. а) $\frac{x^3-5x^2}{x-5}=25$, б) $\frac{y^3-3y^2}{y-3}=9$.

17. а) $x^2+4x=\frac{x^2-4}{x+2}$, б) $y^2-5y=\frac{y^2-49}{y-7}$.

18. а) $x^2=\frac{4x-8}{x-2}$, б) $z^2=\frac{49z+343}{z+7}$.

19. а) $\frac{(2x)^2}{2x+3}=\frac{9}{2x+3}$, б) $\frac{(3z)^2}{3z-4}=\frac{16}{3z-4}$.

20. а) $\left(\frac{x-11}{x-9}\right)^3=\left(\frac{x-11}{x-9}\right)^2$, б) $\left(\frac{x+13}{x-1}\right)^7=\left(\frac{x+13}{x-1}\right)^2$.

21. а) $\frac{|7x-5|}{7x-5}=-1$, б) $\frac{|5y+8|}{5y+8}=-1$.

22. а) $\frac{|(x-5)(x-2)|}{|x-5|}=x-2$, б) $\frac{|(y-3)(y+1)|}{|y-3|}=y+1$.

23. а) $\left|\frac{x+4}{x-7}\right|=x+4$, б) $\left|\frac{x+9}{x-5}\right|=x+9$.

24. а) $\frac{|x+12|}{x+12}=\frac{|x-12|}{x-12}$, б) $\frac{|y+16|}{y+16}=\frac{|y-11|}{y-11}$.

25. Укажите номера тех уравнений, которые не имеют положительных корней:

а) 1) $\frac{x^3+4}{5x}=-1$; 2) $\frac{2x-7}{7x-2}=1$;

3) $\frac{10-5x}{5-3x}=2$; 4) $\frac{5x^2+29x+7}{7x^2+77x+29}=-2$.

б) 1) $\frac{x^5+7}{8x}=-2$; 2) $\frac{4x-12}{12x-4}=1$;

3) $\frac{24-9x}{8-5x}=2$; 4) $\frac{8x^2+71x+12}{12x^2+218x+71}=-4$.

Тренировочная работа 3

Решите уравнение.

1. $\dfrac{2}{x^2-4}+\dfrac{x-4}{x^2+2x}=\dfrac{1}{x^2-2x}$.

2. $\dfrac{5x^2}{x^2-1}+\dfrac{2x^2}{x^2-2x-3}=\dfrac{4x^2-9x}{x^2-4x+3}$.

3. $\dfrac{1}{x^2+2x-3}+\dfrac{18}{x^2+2x+2}=\dfrac{18}{x^2+2x+1}$.

4. $\dfrac{1}{1-\frac{1}{1+\frac{1}{x^3-1}}}=9x$.

5. $\dfrac{x}{x^2-6}+\dfrac{x^2}{x-6}+2=0$.

6. $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{3}{x-3}=\dfrac{6}{x+6}$.

7. $\left(\dfrac{3x}{x+2}\right)^4-8\left(\dfrac{3x}{x+2}\right)^2-9=0$.

8. $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-x+2}+\dfrac{x}{x^2-2x+2}=1$.

9. $\left(\dfrac{x-4}{x-2}\right)^2-2\cdot\dfrac{x^2-16}{x^2-4}+\left(\dfrac{x+4}{x+2}\right)^2=0$.

10. $x^3+3x=\dfrac{28}{x}$.

11. $\dfrac{1}{(x^2+3x)^2+1}+\dfrac{3}{(x+3)^2+1}+\dfrac{5}{(x^2+2x-3)^2+1}=9$.

12. Найдите корни уравнения $f(x)=1$, если $x\neq 0$ и

$$f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x.$$

§ 3. Иррациональные уравнения

Основная идея решения иррационального уравнения — освобождение от иррациональности, к которому приводят:

- равносильные преобразования;
- переход к уравнению-следствию (с последующей проверкой корней подстановкой их в данное уравнение);
- замена переменной.

Кроме того, некоторые иррациональные уравнения можно решать, используя монотонность функции $\sqrt[n]{x}$ и ее неотрицательность при четных n.

Самая распространенная ошибка при решении иррациональных уравнений — переход к уравнению-следствию (т. е. по сути — возведение в квадрат обеих частей уравнения) без последующей проверки получившихся корней. Так, решая уравнение $\sqrt{x}=-x$ возведением обеих частей в квадрат, получаем уравнение-следствие $x=x^2$. Понятно, что при этом происходит расширение области определения. Корни этого уравнения 0 и 1. Без проверки второе число может оказаться в ответе, хотя подстановка его в исходное уравнение позволяет увидеть, что оно не является его корнем, т.к. получается неверное числовое равенство $1=-1$.

К появлению посторонних корней может приводить использование различных тождеств, поскольку левые и правые части тождеств могут иметь разные области определения. Рассмотрим уравнение

$$\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+4}=\sqrt{6}.$$

Используя тождество $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$, получим уравнение-следствие $\sqrt{(x-1)(x+4)}=\sqrt{6}$. Возводя обе его части в квадрат и решая получившееся в результате уравнение $x^2+3x-10=0$, найдем корни -5 и 1. Если при проверке подставлять их в уравнение-следствие, т. е. в уравнение $\sqrt{(x-1)(x+4)}=\sqrt{6}$, можно сделать ошибочный вывод, что оба числа являются искомыми корнями. Однако подстановка в исходное уравнение позволяет увидеть, что корень -5 является посторонним, т.к. получается не имеющее смысла числовое равенство $\sqrt{-6}\cdot\sqrt{-1}=\sqrt{6}$. Причина этого в том, что использование указанного тождества привело к расширению области определения левой части исходного уравнения. Таким образом, нужно четко понимать, что проверку следует производить с помощью подстановки именно в данное уравнение, а не в то, которое получилось в результате каких-либо преобразований данного.

1. Алгебраические преобразования

Уравнения вида $\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{g(x)}$

При решении уравнений этого типа, содержащих корни нечетной степени, нужно помнить, что эти корни извлекаются из любого действительного числа и принимают любые действительные значения. Так, например, уравнение $\sqrt[3]{f(x)}=\sqrt[3]{g(x)}$ равносильно уравнению $f(x)=g(x)$. В случае корней четной степени нужно использовать любой из двух равносильных переходов:

$$\sqrt[2k]{f(x)} = \sqrt[2k]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x), \\ f(x)\geqslant 0 \end{cases}$$

или

$$\sqrt[2k]{f(x)} = \sqrt[2k]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x), \\ g(x)\geqslant 0. \end{cases}$$

На практике выбирается тот, в котором неравенство системы является более простым.

Пример 1. Решите уравнение

$$\sqrt[3]{x^2+8x-8}=\sqrt[3]{2x-1}.$$

Решение. $\sqrt[3]{x^2+8x-8}=\sqrt[3]{2x-1} \Leftrightarrow x^2+8x-8=2x-1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=-7. \end{array}\right.$

Ответ: 1; -7.

Пример 2. Решите уравнение $\sqrt[6]{x^2-2}=\sqrt[6]{x}$.

Решение. $\sqrt[6]{x^2-2}=\sqrt[6]{x} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2=x, \\ x\geqslant 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=2, \end{array}\right. \\ x\geqslant 0. \end{cases} \Leftrightarrow x=2.$$

Ответ: 2.

Уравнения вида $\sqrt{f(x)}=g(x)$

Одним из наиболее распространенных преобразований при решении иррациональных уравнений является возведение в квадрат обеих частей уравнения. Напомним, что если обе части уравнения неотрицательны на некотором множестве, то возведение в квадрат обеих частей такого уравнения не приводит ни к потере, ни к приобретению решений на этом множестве, то есть является равносильным преобразованием. Поэтому

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) = g^2(x). \end{cases}$$

В самом деле, если правая часть уравнения отрицательна, то оно не имеет решений в силу неотрицательности левой части (квадратного корня). Если же правая часть уравнения неотрицательна, то возведение в квадрат обеих его частей является равносильным преобразованием. В последнюю систему порой добавляют требование $f(x) \geqslant 0$, которое совершенно излишне, так как решениями системы являются те значения переменной, для которых $f(x) = g^2(x) \geqslant 0$.

В этой связи стоит вспомнить определение арифметического квадратного корня: арифметическим квадратным корнем из числа a называется такое неотрицательное число b, квадрат которого равен a. Таким образом, $\sqrt{a} = b \Leftrightarrow \begin{cases} b \geqslant 0, \\ a = b^2. \end{cases}$ Обратим внимание на то, что в определении нет ни слова о знаке числа a: ведь никакое отрицательное a определению просто не удовлетворяет. Тем не менее, наличие в системе неравенства $f(x) \geqslant 0$ не будет ни ошибкой, ни даже недочетом, поскольку утверждение

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ f(x) = g^2(x), \\ g(x) \geqslant 0 \end{cases}$$

является верным.

Замечание. Уравнение $\sqrt[2n]{f(x)} = a$ $(n \in \mathbb{N})$ при отрицательных a решений не имеет, а при неотрицательных значениях a равносильно уравнению $f(x) = a^{2n}$ без каких бы то ни было дополнительных условий. Уравнение $\sqrt[2n]{f(x)} = h(x)$ равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) = h^{2n}(x), \\ h(x) \geqslant 0, \end{cases}$$

причем, как правило, уравнение системы решается, а неравенство проверяется.

Пример 3. Решите уравнение $\sqrt{4 + 2x - x^2} = x - 2$.

Решение. Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 4 + 2x - x^2 = x^2 - 4x + 4, \\ x \geqslant 2. \end{cases}$$

Уравнение системы приводится к виду $2x(x-3)=0$, откуда $x=0$ (этот корень не удовлетворяет неравенству $x \geqslant 2$), либо $x=3$.

Ответ: 3.

Уравнения вида $\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}=\sqrt{h(x)}$ *и сводимые к ним*

В том случае, если функции $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ являются линейными, уравнение $\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}=\sqrt{h(x)}$ решается стандартным образом: возведением в квадрат обеих его частей при условии, что каждая из этих функций неотрицательна. Равносильное преобразование для такого уравнения — переход к системе

$$\begin{cases} f(x)+2\sqrt{f(x)g(x)}+g(x)=h(x), \\ f(x) \geqslant 0, \\ g(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

Обратим внимание на то, что условие неотрицательности функции $h(x)$ можно опустить: оно следует из неотрицательности левой части уравнения при условиях $f(x) \geqslant 0$ и $g(x) \geqslant 0$. После возведения в квадрат и приведения подобных будет получено уравнение вида $\sqrt{p(x)}=q(x)$, которое решается способом, рассмотренным выше. Совершенно так же решается уравнение $\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}=\sqrt{h(x)}$ и в том случае, если один из радикалов заменить числом. Если же хотя бы одна из функций $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ не является линейной (причем ни один из радикалов не является числом), то общего метода решения таких уравнений не существует. Рассмотрим примеры решения уравнений этого типа.

Пример 4. Решите уравнение $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1}=3$.

Решение. $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1}=3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2+2\sqrt{x+2}\sqrt{x-1}+x-1=9, \\ x+2 \geqslant 0, \\ x-1 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+2}\sqrt{x-1}=4-x, \\ x \geqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(x-1)=(4-x)^2, \\ x \geqslant 1, \\ x \leqslant 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=16-8x, \\ 1 \leqslant x \leqslant 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2, \\ 1 \leqslant x \leqslant 4. \end{cases}$$

Ответ: 2.

Пример 5. Решите уравнение

$$\sqrt{x+2} = 2+\sqrt{x-4}.$$

Решение. $\begin{cases} x+2=4+4\sqrt{x-4}+x-4, \\ x\geqslant -2, \\ x\geqslant 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-4}=\frac{1}{2}, \\ x\geqslant 4 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-4=\frac{1}{4}, \\ x\geqslant 4 \end{cases} \Leftrightarrow x=4\frac{1}{4}.$

Ответ: $4\frac{1}{4}$.

Уравнения вида $f(x)\cdot\sqrt{g(x)}=0$

При решении уравнений вида $f(x)\cdot\sqrt{g(x)}=0$ допускается большое число ошибок, связанных с плохо усвоенным правилом равенства нулю произведения двух сомножителей: *произведение двух сомножителей равно нулю, если хотя бы один из них равен нулю, а второй не теряет смысла*. О последней части этого утверждения часто забывают, следствием чего является включение в ответ посторонних корней. Решая такое уравнение, нужно правильно формулировать условие равенства нулю произведения двух функций и с помощью этого условия перейти к равносильной совокупности

$$\left[\begin{array}{l} g(x) = 0, \\ \begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) \geqslant 0, \end{cases} \end{array}\right.$$

или же рассмотреть два случая, если знак совокупности не используется. К этой же группе можно отнести чуть более простые уравнения вида $\frac{f(x)}{\sqrt{g(x)}}=0$, равносильное системе $\begin{cases} f(x)=0, \\ g(x)>0, \end{cases}$ и $\frac{\sqrt{g(x)}}{f(x)}=0$, равносильное системе $\begin{cases} g(x)=0, \\ f(x)\neq 0. \end{cases}$

Пример 6. Решите уравнение

$$(x^2+3x-10)\sqrt{x+4} = 0.$$

Решение. $(x^2+3x-10)\sqrt{x+4}=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+3x-10=0, \\ x+4\geqslant 0, \end{cases} \\ x+4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-5, \\ x=2, \end{array}\right. \\ x+4\geqslant 0, \end{cases} \\ x=-4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=-4. \end{array}\right.$$

В качестве следующего примера рассмотрим решение **задачи 5 части I** вводной диагностической работы.

Пример 7. Решите уравнение

$$(x-3)\sqrt{x^2-5x+4}=2x-6.$$

Решение. Перепишем данное уравнение в виде

$$(x-3)\left(\sqrt{x^2-5x+4}-2\right)=0,$$

откуда $\begin{cases} x=3, \\ x^2-5x+4\geqslant 0 \end{cases}$ (эта система не имеет решений) либо

$$\sqrt{x^2-5x+4}-2=0,$$

откуда

$$\sqrt{x^2-5x+4}=2,$$

и, значит,

$$x^2-5x+4=4.$$

Корнями последнего уравнения являются числа 0 и 5.

Ответ: 0; 5.

Свойства корней

Одной из типичных ошибок при решении иррациональных уравнений является неверное преобразование корня из произведения (частного) двух функций в произведение (частное) корней из этих функций и обратное преобразование. Ошибка эта связана с тем, что область определения выражения $\sqrt{f(x)}\sqrt{g(x)}$ уже области определения выражения $\sqrt{f(x)g(x)}$. В самом деле, первое выражение определено, если $\begin{cases} f(x)\geqslant 0, \\ g(x)\geqslant 0. \end{cases}$

Второе выражение определено, если $\begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) \geqslant 0 \end{cases}$ (в этом случае $\sqrt{f(x)g(x)} = \sqrt{f(x)}\sqrt{g(x)}$) или $\begin{cases} f(x) \leqslant 0, \\ g(x) \leqslant 0 \end{cases}$ (в этом случае $\sqrt{f(x)g(x)} = \sqrt{-f(x)}\sqrt{-g(x)}$). Поэтому после перехода от корня из произведения к произведению корней можно потерять решения (чтобы этого не произошло, нужно рассматривать два случая), а при обратном переходе возможно приобретение посторонних решений (для того чтобы их исключить, нужно сделать проверку).

Пример 8. Решите уравнение

$$x(x+3) + (x+3)\sqrt{\frac{x}{x+3}} - 2 = 0.$$

Решение. Подкоренное выражение неотрицательно, если $x \geqslant 0$, или $x < -3$.

Рассмотрим два случая. Пусть $x \geqslant 0$

В этом случае

$$(x+3)\sqrt{\frac{x}{x+3}} = (x+3)\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}} = \sqrt{x+3}\sqrt{x} = \sqrt{x(x+3)}.$$

Обозначив последнее выражение через z ($z \geqslant 0$), получим квадратное уравнение $z^2 + z - 2 = 0$, единственным неотрицательным корнем которого является число 1. Сделаем обратную замену:

$$\sqrt{x(x+3)} = 1 \iff x(x+3) = 1 \iff x^2 + 3x - 1 = 0,$$

откуда: $x = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$.

Условию $x \geqslant 0$ удовлетворяет только $x = \frac{-3+\sqrt{13}}{2}$. Пусть теперь $x < -3$. В этом случае

$$(x+3)\sqrt{\frac{x}{x+3}} = (x+3)\frac{\sqrt{-x}}{\sqrt{-(x+3)}} =$$

$$= -(-(x+3))\frac{\sqrt{-x}}{\sqrt{-(x+3)}} = -\sqrt{-(x+3)}\sqrt{-x} = -\sqrt{x(x+3)}.$$

Квадратное уравнение относительно той же переменной z будет иметь вид $z^2 - z - 2 = 0$. Единственным неотрицательным корнем последнего уравнения является число 2. Таким образом,

$$\sqrt{x(x+3)} = 2 \iff x(x+3) = 4 \iff x^2 + 3x - 4 = 0,$$

откуда: $x = -4$; $x = 1$. Условию $x < -3$ удовлетворяет только $x = -4$.

Ответ: -4; $\frac{-3+\sqrt{13}}{2}$.

2. Замена переменной

Одним из самых распространенных методов решения уравнений является замена переменной. Этот метод используется и для иррациональных уравнений. Наиболее часто встречаются уравнения, которые можно привести к виду

$$af(x)+b\sqrt{f(x)}+c=0$$

(в этом случае используется замена $z=\sqrt{f(x)}$, $z\geqslant 0$, после которой уравнение сводится к квадратному относительно z), а также уравнения вида

$$a\cdot\sqrt{\frac{f(x)}{g(x)}}+b\cdot\sqrt{\frac{g(x)}{f(x)}}=c$$

(в этом случае уравнение сводится к квадратному заменой $z=\sqrt{\dfrac{f(x)}{g(x)}}$, $z>0$). Обратим внимание на то, что при подстановке $t=\sqrt[2n]{f(x)}$ переменная t принимает только неотрицательные значения, а при подстановке $t=\sqrt[2n+1]{f(x)}$ — любые действительные значения. Особый вид иррациональных уравнений представляют собой уравнения, содержащие выражение $\sqrt[n]{f^n(x)}$ а основные трудности при решении этих уравнений связаны с их распознаванием и правильным извлечением корня для корня с четным показателем: $\sqrt[2n]{f^{2n}(x)}=|f(x)|$ (о знаке модуля часто забывают).

Перейдем к рассмотрению примеров, начав с решения **задачи 6 части I** вводной диагностической работы.

Пример 1. Решите уравнение

$$\sqrt{\frac{3-x}{x-1}}+3\sqrt{\frac{x-1}{3-x}}=4.$$

Решение. Пусть $u=\sqrt{\dfrac{3-x}{x-1}}$. Тогда $\begin{cases} u+\dfrac{3}{u}=4, \\ u>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} u=1, \\ u=3, \end{array}\right. \\ u>0. \end{cases}$

Сделаем обратную замену

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{\dfrac{3-x}{x-1}}=1, \\ \sqrt{\dfrac{3-x}{x-1}}=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=\dfrac{3}{2}. \end{array}\right.$$

Ответ: 2; $\frac{3}{2}$.

Пример 2. Решите уравнение

$$x^2+3x+\sqrt{x^2+3x}=6.$$

Решение. Сделаем замену переменной: $z=\sqrt{x^2+3x}$. Тогда

$$\begin{cases} z^2+z=6, \\ z\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} z=-3, \\ z=2, \end{array}\right. \\ z\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow z=2.$$

Сделаем обратную замену:

$$\sqrt{x^2+3x}=2 \Leftrightarrow x^2+3x=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-4, \\ x=1. \end{array}\right.$$

Ответ: -4; 1.

3. Применение свойств функций

Пример 1. Решите уравнение

$$\sqrt[3]{x-2}+\sqrt{3x-5}=3.$$

Решение. Единственный корень данного уравнения сразу можно найти, заметив, что его левая часть представляет собой монотонно возрастающую на своей области определения функцию

$$f(x)=\sqrt[3]{x-2}+\sqrt{3x-5}.$$

Поскольку $f(3)=3$, то $x=3$ — корень уравнения, и других корней в силу монотонности функции $f(x)$ уравнение $f(x)=3$ не имеет.

Ответ: 3.

Пример 2. Решите уравнение

$$\sqrt{x^2+3x-4}+\sqrt{x^3+12x^2-11x-2}=0.$$

Решение. В силу неотрицательности квадратного корня данное уравнение имеет решения в том и только том случае, если

$$\begin{cases} x^2+3x-4=0, \\ x^3+12x^2-11x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=-4, \end{array}\right. \\ x^3+12x^2-11x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$$

Ответ: 1.

Иррациональные уравнения

Решите уравнение.

1. а) $\sqrt{2x^2+7}=x-4$, б) $\sqrt{5x^2-11}=2x+1$.

2. а) $\dfrac{x^2-9}{\sqrt{-5x}}=0$, б) $\dfrac{x^2-25}{\sqrt{-7x}}=0$.

3. а) $\dfrac{25x^2-36}{\sqrt{1-x}}=0$, б) $\dfrac{9y^2-64}{\sqrt{2+y}}=0$.

4. а) $(x^2-16)\sqrt{3-x}=0$, б) $(y^2-64)\sqrt{7-y}=0$.

5. а) $\dfrac{x^2-10x+9}{\sqrt{x}-3}=0$, б) $\dfrac{z^2-5z+4}{\sqrt{z}-1}=0$.

6. а) $\sqrt{5x+1}=x-7$, б) $\sqrt{2z-1}=z-8$.

7. а) $\sqrt{2x-1}=3x-2$, б) $\sqrt{7y+2}=5y-2$.

8. а) $\sqrt{(3x-5)^2}=4$, б) $\sqrt{(4z-9)^2}=7$.

9. а) $\sqrt{x^2-10}=\sqrt{2x+5}$, б) $\sqrt{z^2-18}=\sqrt{5z-4}$.

10. а) $\sqrt{3-2x}=2x-3$, б) $\sqrt{7-2x}=2x-7$.

11. а) $\sqrt{x^2-3x+2}=-x^2+3x-2$, б) $\sqrt{x^2+3x-10}=-x^2-3x+10$.

12. а) $4\sqrt{x}=3x+1$, б) $5\sqrt{y}=2y+3$.

13. а) $\dfrac{x^2}{\sqrt{3-2x}}=\dfrac{4}{\sqrt{3-2x}}$, б) $\dfrac{y^2}{\sqrt{7+8y}}=\dfrac{25}{\sqrt{7+8y}}$.

14. а) $\dfrac{\sqrt{x-6}}{2x-1}=\dfrac{\sqrt{x-6}}{3x-2}$, б) $\dfrac{\sqrt{z-2}}{5z+8}=\dfrac{\sqrt{z-2}}{3z+4}$.

15. а) $\dfrac{\sqrt{x^2-5}}{\sqrt{x-5}}=1$, б) $\dfrac{\sqrt{9z^2-16}}{\sqrt{3z+4}}=1$.

16. а) $\sqrt{(x-7)(x-3)}=\sqrt{x-7}$, б) $\sqrt{(z+5)(z-7)}=\sqrt{z+5}$.

17. а) $(x-5)\sqrt{x-4}\sqrt{x-6}=0$, б) $(y-7)\sqrt{y-6}\sqrt{y-8}=0$.

18. а) $(x+1)(x-6)\sqrt{x-5}=0$, б) $(z-8)(z+7)\sqrt{z+3}=0$.

19. а) $(x-7)(x+5)\sqrt{4-x}=0$, б) $(x+7)(x-1)\sqrt{-5-x}=0$.

20. а) $\dfrac{\sqrt{(x-5)(x+8)}}{\sqrt{(x+5)(x-8)}}=0$, б) $\dfrac{\sqrt{(x-7)(x+8)}}{\sqrt{(x+7)(x-8)}}=0$.

21. а) $\dfrac{(x-1)(x-4)(x-11)}{\sqrt{x-2}-3}=0$, б) $\dfrac{(z+7)(z-4)(z-18)}{\sqrt{z-2}-4}=0$.

22. а) $\sqrt{(x-2)(x-9)}=\sqrt{2-x}$, б) $\sqrt{(y-6)(y-4)}=\sqrt{6-y}$.

23. а) $(x+2)\sqrt{x-1}=\sqrt{x-1}$, б) $(z+7)\sqrt{z-5}=\sqrt{z-5}$.

24. а) $(x-9)\sqrt{x-7}=x-9$, б) $(y-2)\sqrt{y+7}=y-2$.

25. а) $\sqrt{x+2}\sqrt{2x-3}=3$, б) $\sqrt{x-4}\sqrt{2x-7}=1$.

Тренировочная работа 4

Решите уравнение.

1. $\sqrt{5x+4}=-x-2.$

2. $\sqrt{2x^2-9x+4}=x+2.$

3. $\sqrt{4x^4+8x^3+6x+10}=3-2x^2.$

4. $\sqrt[3]{2x^2-x-1}=-2.$

5. $(3x^2-7x+2)\sqrt{3+5x-2x^2}=0.$

6. $(x^2+3x-10)\sqrt{2-3x}=3x^2+9x-30.$

7. $(2x^2-7x+3)\sqrt{x^3+2x^2-6x-3}=3-10x+9x^2-2x^3.$

8. $\dfrac{\sqrt{3x-2}-2x+1}{256x^4-40x-51}=0.$

9. $\dfrac{x^2-x-\sqrt{x^4-2x^3+3x^2+3x+1}}{5x^3-6x+1}=0.$

10. $\sqrt{2x^2-x-8}=\sqrt{x^2+2x-8}.$

11. $\sqrt{x+4-4\sqrt{x}}-\sqrt{x+25-10\sqrt{x}}=1.$

12. $3\sqrt[6]{2x^2+3x-8}=4\sqrt[3]{2x^2+3x-8}-1.$

§ 4. Тригонометрические уравнения

Основная идея решения тригонометрического уравнения — сведение его к одному или нескольким простейшим уравнениям, т. е. уравнениям вида $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$. Каждое из этих уравнений легко решается с помощью тригонометрической окружности, на которой изображаются соответствующие точки, после чего с учетом периодичности тригонометрических функций записывается ответ. С определенной степенью условности любое стандартное тригонометрическое уравнение («стандартное» не обязательно означает «простое») можно отнести к одному из двух основных типов: уравнения, сводимые к простейшим с помощью тех или иных тригонометрических преобразований (понижения степени, преобразования суммы тригонометрических функций в произведение, введения вспомогательного угла и др.), и уравнения, вначале сводимые к алгебраическим с помощью той или иной замены переменной, а затем с помощью обратной замены приводимые к одному или нескольким простейшим.

1. Алгебраические преобразования

Уравнения, непосредственно сводимые к простейшим

Наименее отдалены по уровню сложности от простейших тригонометрических уравнений уравнения вида

$$h(kx+b) = a \quad \text{и} \quad (h(x)-a)(g(x)-b) = 0,$$

где $h(x)$ и $g(x)$ — какие-то из четырех основных тригонометрических функций.

Вместо перехода от уравнения вида $\cos(f(x)) = m$ (где $|m| \leqslant 1$) к уравнению $f(x) = \pm\arccos m + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, бывает целесообразно перейти к совокупности

$$\left[\begin{array}{l} f(x) = \arccos m + 2\pi k, \\ f(x) = -\arccos m + 2\pi n, \end{array}\right. \qquad k, n \in \mathbb{Z}.$$

Аналогичное замечание справедливо для уравнения вида $\sin(f(x)) = m$ (где $|m| \leqslant 1$). Соответствующая совокупность в этом случае имеет вид:

$$\left[\begin{array}{l} f(x) = \arcsin m + 2\pi k, \\ f(x) = \pi - \arcsin m + 2\pi n, \end{array}\right. \qquad k, n \in \mathbb{Z}.$$

Уравнение $\operatorname{tg}(f(x)) = m$ равносильно уравнению $f(x) = \operatorname{arctg} m + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Пример 1. Решите уравнение

$$\operatorname{tg}\left(2x+\frac{\pi}{7}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

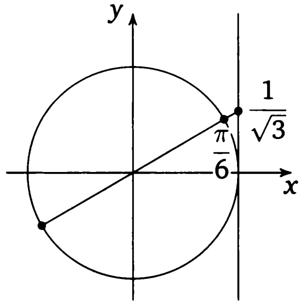
Решение. $\operatorname{tg}\left(2x+\frac{\pi}{7}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2x+\frac{\pi}{7} = \frac{\pi}{6}+\pi n,\ n \in \mathbb{Z};$$

$$2x = \frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{7}+\pi n,\ n \in \mathbb{Z};$$

$$x = \frac{\pi}{84}+\frac{\pi n}{7},\ n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{84}+\frac{\pi n}{7},\ n\in\mathbb{Z}$.



Применение формул удвоенного аргумента

Решение уравнений этого типа основано на применении формул удвоенного аргумента.

Пример 2. Решите уравнение $\sin 2x - \cos x = 0$.

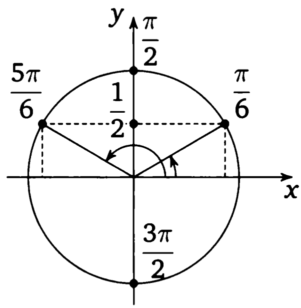
Решение. $\sin 2x - \cos x = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2\sin x \cdot \cos x - \cos x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x \cdot (2\sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0, \\ 2\sin x - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0, \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2}+\pi n,\ n \in \mathbb{Z}, \\ x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6}+\pi k,\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

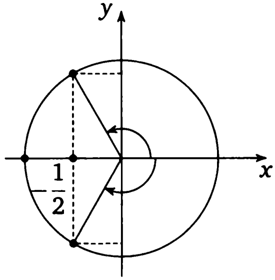


Ответ: $x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z};\ x=(-1)^k \cdot \frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

Преобразование суммы в произведение и обратное преобразование

При решении этого типа задач используются формулы преобразования суммы (разности) двух тригонометрических функций в произведение и формулы, позволяющие перейти от произведения двух тригонометрических функций к сумме (разности). В качестве первого примера рассмотрим решение **задачи 7 части I** вводной диагностической работы.

Пример 3. Решите уравнение $\sin 3x + \sin 4x + \sin 5x = 0$.



Решение. $\sin 3x + \sin 4x + \sin 5x = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2\sin x\frac{3x+5x}{2}\cdot\cos\frac{3x-5x}{2}+\sin 4x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin 4x\cdot\cos x+\sin 4 = 0 \Leftrightarrow$$

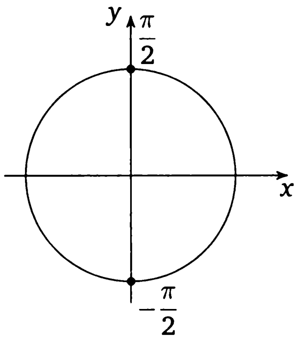
$$\Leftrightarrow \sin 4x(2\cos x+1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 4x = 0,\\ \cos x = -\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4x = \pi n,\ n\in\mathbb{Z},\\ x = \pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Ответ: $x=\frac{\pi n}{4},\ n\in\mathbb{Z};\ x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$

Пример 4. Решите уравнение $\cos 3x + \sin 2x = 0$.

Решение. Поскольку



$$\sin 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right),$$

то

$$\cos 3x+\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{\frac{\pi}{2}+x}{2}\cdot\cos\frac{5x-\frac{\pi}{2}}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) = 0,\\ \cos\left(\frac{5x}{2}-\frac{\pi}{4}\right) = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z},\\ \frac{5x}{2}-\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z},\\ x = \frac{3\pi}{10}+\frac{2\pi k}{5},\ k\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z};\ x=\frac{3\pi}{10}+\frac{2\pi k}{5},\ k\in\mathbb{Z}.$

Условия равенства двух одноименных тригонометрических функций

Уравнения указанного ниже вида могут быть решены как разложением на множители (с использованием формул суммы или разности синусов или косинусов), так и с использованием условий равенства двух одноименных тригонометрических функций различных аргументов. Приведем соответствующие равносильные переходы:

$$\cos(f(x)) = \cos(g(x)) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) + 2\pi n, \\ f(x) = -g(x) + 2\pi k, \end{array}\right.$$

$$\sin(f(x)) = \sin(g(x)) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) + 2\pi n, \\ f(x) = \pi - g(x) + 2\pi k, \end{array}\right.$$

$$\operatorname{tg}(f(x)) = \operatorname{tg}(g(x)) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) + \pi n, \\ f(x) \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \end{array}\right.$$

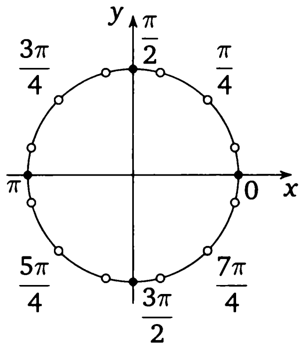
$$\operatorname{ctg}(f(x)) = \operatorname{ctg}(g(x)) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) + \pi n, \\ f(x) \neq \pi k \end{array}\right.$$

$$(k \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{Z}).$$

Заметим также, что уравнения вида

$$\sin(f(x)) = \cos(g(x)) \quad \text{и} \quad \operatorname{tg}(f(x)) = \operatorname{ctg}(g(x))$$

с помощью формул приведения сводятся соответственно к уравнениям $\sin(f(x)) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - g(x)\right)$ и $\operatorname{tg}(f(x)) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - g(x)\right)$.



Пример 5. Решите уравнение $\operatorname{tg} 6x = \operatorname{tg} 2x$.

Решение. $\operatorname{tg} 6x = \operatorname{tg} 2x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x = 2x + \pi n,\ n \in \mathbb{Z} \\ \cos 6x \neq 0, \\ \cos 2x \neq 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi n}{4},\ n \in \mathbb{Z}, \\ 6x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}, \\ 2x \neq \frac{\pi}{2} + \pi m,\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi n}{4},\ n \in \mathbb{Z}, \\ x \neq \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{6},\ k \in \mathbb{Z}, \\ x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2},\ m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ: $x = \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}$.

Понижение степени

При решении задач этого типа применяются формулы понижения степени $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$, после чего уравнение, как правило, удается свести к одному из рассмотренных ранее типов.

Пример 6. Решите уравнение $\cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = \frac{3}{2}$.

Решение. $\cos^2 2x+\cos^2 3x+\cos^2 4x=\frac{3}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{1+\cos 4x}{2}+\frac{1+\cos 6x}{2}+\frac{1+\cos 8x}{2}=\frac{3}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos 4x+\cos 6x+\cos 8x=0 \Leftrightarrow$$

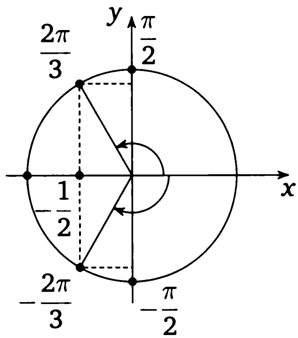
$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{4x+8x}{2}\cdot\cos\frac{4x-8x}{2}+\cos 6x=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos 6x(2\cos 2x+1)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 6x=0,\\ \cos 2x=-\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}6x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z},\\ 2x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{6},\ n\in\mathbb{Z},\\ x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$



Ответ: $x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{6},\ n\in\mathbb{Z};\ x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$

Разложение на множители

При решении уравнений этого типа наиболее часто встречающаяся ошибка: деление обеих частей уравнения на выражение, содержащее неизвестную (правильное действие: перенос всех членов в одну из частей уравнения и вынесение общего множителя). Такая ошибка приводит к неверному ответу, поскольку теряются корни — те значения переменной, при которых указанное выражение обращается в нуль.

Пример 7. Решите уравнение $\cos 2x=\sin^3 x+\cos^3 x$.

Решение. $\cos 2x=\sin^3 x+\cos^3 x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x-\sin^2 x=(\sin x+\cos x)\cdot(\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)-(\sin x+\cos x)\cdot(1-\sin x\cos x)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sin x+\cos x)(\cos x-\sin x-1+\sin x\cos x)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\sin x+\cos x=0, & (1)\\ \cos x-\sin x-1+\sin x\cos x=0. & (2)\end{array}\right.$$

Решим (1): $\sin x+\cos x=0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$

Решим (2): $\cos x(1+\sin x)-(1+\sin x)=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (1+\sin x)(\cos x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=-1,\\ \cos x=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z},\\ x=2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$; $2\pi m, m\in\mathbb{Z}$.

Введение вспомогательного аргумента

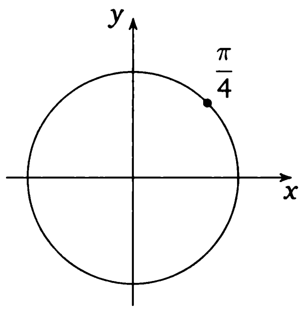
Решение задач указанного типа основывается на преобразовании выражений вида $a\sin x+b\cos x$ в выражения вида $A\sin(x+\varphi)$, $A\cos(x+\varphi)$ с помощью известной схемы.

Пример 8. Решите уравнение $\sin x+\cos x=\sqrt{2}$.

Решение. $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x=1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$



Ответ: $x=\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

Пример 9. Решите уравнение

$$\cos 3x-\sin x=\sqrt{3}(\cos x-\sin 3x).$$

Решение. $\cos 3x-\sin x=\sqrt{3}(\cos x-\sin 3x) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \cos 3x+\sqrt{3}\sin 3x=\sin x+\sqrt{3}\cos x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos 3x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 3x=\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)-\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\left(x-\frac{\pi}{12}\right)\cdot\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\left(x-\frac{\pi}{12}\right)=0,\\ \cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-\frac{\pi}{12}=\pi n,\ n\in\mathbb{Z},\\ 2x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{12}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z},\\ x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2},\ k\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{12}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2},\ k\in\mathbb{Z}$.

2. Замена переменной

Замена переменной, как правило, позволяет свести тригонометрическое уравнение к алгебраическому (обычно квадратному). Если в уравнении вида $f(\sin x; \cos x)=0$ (здесь f — рациональное алгебраическое выражение) в левой части есть только четные степени косинуса, то следует воспользоваться равенством $\cos^2 x = 1-\sin^2 x$, после чего свести уравнение к алгебраическому заменой $a=\sin x$, $|a|\leqslant 1$. Аналогично, если в левой части такого уравнения есть только четные степени синуса, то уравнение сводится к алгебраическому заменой $a=\cos x$, $|a|\leqslant 1$.

Однородным уравнением n-го порядка называется уравнение вида

$$a_n\cdot f^n(x)+a_{n-1}\cdot f^{n-1}(x)\cdot g(x)+a_{n-2}\cdot f^{n-2}(x)\cdot g^2(x)+\ldots+a_0\cdot g^n(x) = 0.$$

Иногда однородное уравнение n-го порядка называют *однородным уравнением n-й степени*. Однородное уравнение сводится к алгебраическому уравнению n-й степени после деления обеих частей на $g^n(x)$ и введения новой переменной $t=\dfrac{f(x)}{g(x)}$. Следует подчеркнуть, что при делении на $g^n(x)$ может произойти потеря корней уравнения, поэтому обязательной является проверка тех значений x, при которых $g^n(x)=0$. Если эти значения x являются корнями исходного уравнения, то их также следует включить в ответ.

Среди всех однородных уравнений выделяют уравнение второго порядка, которое сводится к квадратному уравнению. В школьной практике встречаются также уравнения третьего порядка, которые сводятся к кубическим уравнениям. Последние решаются, как правило, путем группировки и последующего разложения на множители. Если $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$, то однородное уравнение второго порядка имеет вид

$$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0$$

и сводится к квадратному заменой $z=\operatorname{tg} x$ (после деления на $\cos^2 x$) или $z=\operatorname{ctg} x$ (после деления на $\sin^2 x$). Уравнение

$$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d$$

сводится к однородному с помощью тождества

$$d = d(\sin^2 x+\cos^2 x)$$

(иногда такое преобразование называют *умножением на тригонометрическую единицу*).

Отдельного замечания заслуживает универсальная тригонометрическая подстановка. Вообще говоря, любое тригонометрическое уравнение вида $f(\sin x; \cos x) = 0$ (f — рациональное алгебраическое выражение) может быть сведено к алгебраическому уравнению относительно новой переменной $z = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ с помощью формул

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}, \quad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$$

(поэтому такая подстановка и называется универсальной). Отметим, что эти формулы не являются тождествами: они справедливы, только если $\cos\frac{x}{2} \neq 0$. Поэтому случай, когда $\cos\frac{x}{2} = 0$, то есть когда $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, при решении уравнения этим способом должен быть рассмотрен отдельно. Если такие значения x являются решениями исходного уравнения (это проверяется подстановкой значений $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, в данное уравнение), то их также следует включить в ответ. Таким образом, решение уравнений с помощью универсальной тригонометрической подстановки требует повышенного внимания и осторожности. Кроме того — и это самое главное — довольно трудно придумать уравнение, решение которого возможно только с помощью универсальной тригонометрической подстановки. Другие способы, как правило, оказываются более эффективными и короткими. Поэтому рекомендовать использование универсальной тригонометрической подстановки в качестве метода решения уравнений можно лишь со значительными оговорками.

Пример 1. Решите уравнение

$$3\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x - 1 = 0.$$

Решение. Сделаем замену $\operatorname{tg} x = a$.

$$3a^2 + 2a - 1 = 0 \iff \left[\begin{aligned} a &= -1, \\ a &= \frac{1}{3}. \end{aligned}\right.$$

Следовательно, $\left[\begin{aligned} \operatorname{tg} x &= -1, \\ \operatorname{tg} x &= \frac{1}{3} \end{aligned}\right. \iff \left[\begin{aligned} x &= -\frac{\pi}{4} + \pi n, \ n \in \mathbb{Z}, \\ x &= \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \pi k, \ k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}\right.$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $x = \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Пример 2. Решите уравнение $4\cos^2 x - 2\sin^2 x - 5\cos x - 4 = 0$.

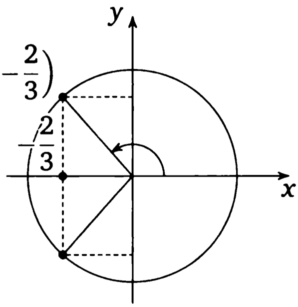
Решение. $4\cos^2 x - 2\sin^2 x - 5\cos x - 4 = 0 \Leftrightarrow 6\cos^2 x - 5\cos x - 6 = 0$. Обозначим $a = \cos x$, заметим, что $|a| \leqslant 1$. Тогда

$$6a^2 - 5a - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = \frac{3}{2}, \\ a = -\frac{2}{3}. \end{array}\right.$$

Значение $a = \frac{3}{2}$ не удовлетворяет условию $|a| \leqslant 1$. Значит,

$\cos x = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \pm\arccos\left(-\frac{2}{3}\right) + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$



Ответ: $x = \pm\arccos\left(-\frac{2}{3}\right) + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Пример 3. Решите уравнение $7 + 4\sin x \cdot \cos x + 1{,}5(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) = 0$.

Решение. Область определения $\sin x \neq 0$; $\cos x \neq 0$. Так как

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x \sin x} = \frac{1}{\cos x \sin x},$$

уравнение примет вид:

$$7 + 2\sin 2x + \frac{3}{\sin 2x} = 0;$$

обозначим $a = \sin 2x$, $|a| \leqslant 1$. Получаем

$$7a + 2a^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -3, \\ a = -\frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Значение $a = -3$ не удовлетворяет условию $|a| \leqslant 1$, значит, $\sin 2x = -\frac{1}{2}$.

$$2x = (-1)^n \cdot \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = (-1)^n \cdot \left(-\frac{\pi}{12}\right) + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

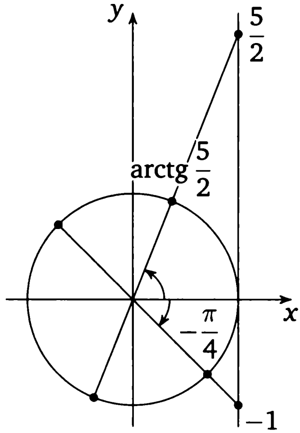
Пример 4. Решите уравнение

$$2\sin^2 x - 3\sin x \cdot \cos x - 5\cos^2 x = 0.$$

Решение. Заметим, что те значения x, при которых $\cos x = 0$, не являются решениями данного уравнения.

Разделим обе части уравнения на $\cos^2 x$, получим:

$$\frac{2\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{3\sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x} - \frac{5\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0 \Leftrightarrow 2\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x - 5 = 0.$$



Обозначим $a = \operatorname{tg} x$:

$$2a^2 - 3a - 5 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} a = \frac{5}{2}, \\ a = -1, \end{array}\right.$$

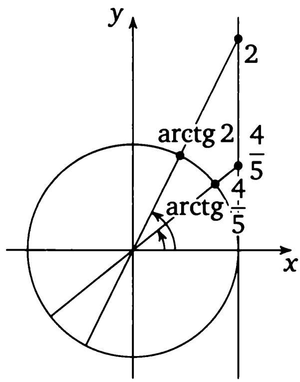
или

$$\left[\begin{array}{l} x = \operatorname{arctg}\frac{5}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}, \\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Ответ: $x = \operatorname{arctg}\frac{5}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Пример 5. Решите уравнение

$\sin^2 x - 14\sin x \cdot \cos x + 4\cos^2 x + 4 = 0.$



Решение. Поскольку

$$4 = 4(\sin^2 x + \cos^2 x),$$

то уравнение примет вид

$$\sin^2 x - 14\sin x \cdot \cos x + \\ + 4\cos^2 x + 4(\sin^2 x + \cos^2 x) = 0,$$

или

$$5\sin^2 x - 14\sin x \cdot \cos x + 8\cos^2 x = 0 \iff \\ \iff 5\operatorname{tg}^2 x - 14\operatorname{tg} x + 8 = 0$$

(так как значения x, при которых $\cos x = 0$, не являются решениями данного уравнения). Следовательно, $\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = \frac{4}{5}, \\ \operatorname{tg} x = 2. \end{array}\right.$ Значит,

$$\left[\begin{array}{l} x = \operatorname{arctg}\frac{4}{5} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}, \\ x = \operatorname{arctg} 2 + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Ответ: $x = \operatorname{arctg}\frac{4}{5} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; $x = \operatorname{arctg} 2 + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Пример 6. Решите уравнение

$$\sin^3 x + 3\sin^2 x \cdot \cos x - \sin x \cdot \cos^2 x - 3\cos^3 x = 0.$$

Решение. Уравнение является однородным уравнением третьей степени. Значения x, при которых $\cos x = 0$, не являются его корнями.

Разделив обе части уравнения на $\cos^3 x$, получим

$$\operatorname{tg}^3 x + 3\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 3 = 0.$$

Пусть $a = \operatorname{tg} x$. Тогда

$$a^3 + 3a^2 - a - 3 = 0 \iff a(a^2-1) + 3(a^2-1) = 0 \iff$$

$$\iff (a^2-1)(a+3) = 0 \iff (a-1)(a+1)(a+3) \iff \left[\begin{array}{l} a = 1, \\ a = -1, \\ a = -3, \end{array}\right.$$

то есть

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = 1, \\ \operatorname{tg} x = -1, \\ \operatorname{tg} x = -3 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}, \\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}, \\ x = \operatorname{arctg}(-3) + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; $x = \operatorname{arctg}(-3) + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

3. Отбор корней в тригонометрических уравнениях

Решение некоторых тригонометрических уравнений предполагает отбор корней, удовлетворяющих тем или иным ограничениям (например, связанный с ограниченностью синуса или косинуса: такие примеры были рассмотрены в предыдущем пункте). В некоторых уравнениях отбор корней оговорен в условии или диктуется дополнительными ограничениями: знаменатель дроби не равен нулю, выражение под знаком корня четной степени неотрицательно, выражение под знаком логарифма положительно и др. Исключив те точки, которые не удовлетворяют условию задачи или введенным ограничениям, следует записать ответ в возможно более компактной форме. Для этого следует обратить внимание на точки, являющиеся концами диаметров единичной окружности, точки, симметричные относительно оси абсцисс (они соответствуют числам $\pm a$), и точки, получающиеся последовательными поворотами некоторой из них на один и тот же угол, равный $\frac{2\pi}{p}$ (p — натуральное число).

При таком подходе к отбору корней можно обойтись без решения линейных уравнений в целых числах. Эти уравнения имеют вид

$$ax + by = c,$$

где a, b, c — целочисленные коэффициенты, x и y — целочисленные неизвестные, и называются диофантовыми уравнениями по имени древнегреческого ученого Диофанта, жившего в III веке. Диофантовы уравнения имеют, как правило, много решений, и поэтому иногда их называют неопределенными уравнениями. Изложение общего метода решения линейных диофантовых уравнений займет много места (да оно и выходит за рамки школьной программы). Заметим лишь, что при отборе корней тригонометрических уравнений без использования тригонометрической окружности обычно достаточно использовать свойства делимости целых чисел, и в частности свойства четности и нечетности. Покажем на примере, как применяются эти свойства.

Пусть, например, нужно найти решения уравнения $\frac{\sin 8x}{\sin x} = 1$. Это уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \sin 8x = \sin x, \\ \sin x \neq 0. \end{cases}$$

Таким образом, из решений $x = \frac{2}{7}\pi m$ и $x = \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi n}{9}$ уравнения системы нужно исключить числа $x = \pi k$ ($m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$). Найдем сначала, при каких целых m и k выполняется равенство $\frac{2}{7}\pi m = \pi k$. Это равенство легко приводится к виду $2m = 7k$. Левая часть последнего равенства является четным числом. Поэтому правая часть также должна быть четным числом, что возможно, только если k является четным числом, то есть $k = 2l$, $l \in \mathbb{Z}$. При этом $2m = 7 \cdot 2l$, откуда $m = 7l$. Следовательно, целые числа вида $m = 7l$ нужно исключить из решений $x = \frac{2}{7}\pi m$. Далее найдем, при каких целых n и k выполняется равенство $\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi n}{9} = \pi k$. Это равенство приводится к виду $2n+1=9k$. Левая часть последнего равенства является нечетным числом. Поэтому правая часть также должна быть нечетным числом, что возможно, только если k является нечетным числом, то есть $k = 2l + 1$, $l \in \mathbb{Z}$. При этом $2n + 1 = 9(2l + 1)$, откуда находим, что $n = 9l + 4$. Следовательно, целые числа вида $n = 9l + 4$ нужно также исключить из решения. Рассуждая аналогично, в большинстве случаев при отборе корней действительно удается ограничиться применением свойств делимости целых чисел, а не решать диофантовы уравнения в общем виде (напомним, что другой способ отбора основан на использовании тригонометрической окружности). В более простых случаях достаточно умения грамотно строить соответствующие рассуждения. Приведем решения некоторых уравнений.

Пример 1. Решите уравнение $\sqrt{9-x^2}\cos x=0$.

Решение. $\sqrt{9-x^2}\cos x=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{9-x^2}=0, \\ \begin{cases} \cos x=0, \\ 9-x^2\geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 3, \\ \begin{cases} x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}, \\ -3\leqslant x\leqslant 3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 3, \\ x=\pm\frac{\pi}{2}. \end{array}\right.$$

Ответ: ± 3; $\pm\frac{\pi}{2}$.

Пример 2. Решите уравнение

$$\left(\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\sqrt{3x^2-7x+4}=0.$$

Решение. Произведение двух выражений равно нулю, если хотя бы одно из них равно нулю, а другое при этом не теряет смысла:

$$\left(\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\sqrt{3x^2-7x+4}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ 3x^2-7x+4\geqslant 0, \end{cases} \\ 3x^2-7x+4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=(-1)^n\cdot\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}, \\ (x-1)\left(x-\frac{4}{3}\right)\geqslant 0 \end{cases} \\ x=1, \\ x=\frac{4}{3}. \end{array}\right.$$

Поскольку $3<\pi<4$, то $1<\frac{\pi}{3}<\frac{4}{3}$. Поэтому $n\neq 0$.

Ответ: $\left\{1;\ \frac{4}{3}\right\}\cup\left\{(-1)^n\cdot\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z},\ n\neq 0\right\}$.

Пример 3. Решите уравнение

$$|\cos x+\sin x|=\sqrt{2}\sin 2x.$$

Решение. $|\cos x+\sin x|=\sqrt{2}\sin 2x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\cos x+\sin x)^2=2\sin^2 2x, \\ \sin 2x\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin 2x=1, \\ \sin 2x=-\frac{1}{2} \end{array}\right. \\ \sin 2x\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x=1 \Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

Пример 4. Решить уравнение $(2\cos^2 x - \cos x)\sqrt{-11\operatorname{tg} x} = 0$.

Решение. Произведение двух множителей равно нулю, если хотя бы один из них равен нулю, а другой при этом не теряет смысла. Поэтому данное уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2\cos^2 x - \cos x = 0, \\ \operatorname{tg} x < 0, \\ \cos x \neq 0, \end{cases} \\ \operatorname{tg} x = 0. \end{array}\right.$$

Из уравнения $2\cos^2 x - \cos x = 0$ получаем $\cos x = \frac{1}{2}$ либо $\cos x = 0$ (что противоречит условию $\cos x \neq 0$). Решениям уравнения $\cos x = \frac{1}{2}$ соответствуют две точки единичной окружности, одна из которых лежит в первой четверти (и значит, для нее неравенство $\operatorname{tg} x < 0$ не выполняется), а другая — в четвертой четверти (для нее неравенство $\operatorname{tg} x < 0$ выполняется и решение уравнения дается формулой $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$). Теперь осталось выписать решение простейшего тригонометрического уравнения $\operatorname{tg} x = 0$, т. е. $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, и записать ответ.

Ответ: $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Пример 5. Решить уравнение $\dfrac{26\cos^2 x - 23\cos x + 5}{13\sin x - 12} = 0$.

Решение. Дробь равна нулю, если числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю и не теряет смысла. Поэтому данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 26\cos^2 x - 23\cos x + 5 = 0, \\ \sin x \neq \frac{12}{13}. \end{cases}$$

Решив уравнение системы как квадратное относительно $\cos x$, находим $\cos x = \frac{1}{2}$ либо $\cos x = \frac{5}{13}$. Если $\cos x = \frac{1}{2}$, то $\sin x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ и неравенство $\sin x \neq \frac{12}{13}$ системы выполняется. Следовательно, $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Если $\cos x = \frac{5}{13}$, то $\sin x = \pm\frac{12}{13}$. В этом случае с учетом неравенства $\sin x \neq \frac{12}{13}$ системы получаем, что из двух точек единичной окружности, соответствующих решениям уравнения $\cos x = \frac{5}{13}$, нужно оставить только ту, для которой $\sin x = -\frac{12}{13}$. Это точка четвертой четверти, и решение уравнения имеет вид $x = -\arccos\frac{5}{13} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $x = -\arccos\frac{5}{13} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

4. Применение свойств функций

Решение некоторых тригонометрических уравнений основано на свойстве ограниченности синуса и косинуса.

Пример 1. Решите уравнение $\sin^{100} x + \cos^{100} x = 1$.

Решение. Поскольку $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ и $\sin^{100} x \leqslant \sin^2 x$, $\cos^{100} x \leqslant \leqslant \cos^2 x$, то

$$\sin^{100} x + \cos^{100} x \leqslant \sin^2 x + \cos^2 x,$$

то есть

$$\sin^{100} x + \cos^{100} x \leqslant 1.$$

Равенство достигается, только если одновременно выполнены условия:

$$\begin{cases} \sin^{100} x = \sin^2 x, \\ \cos^{100} x = \cos^2 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ \sin^2 x = 1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \cos x = 0, \\ \cos^2 x = 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin x = 0, \\ \cos^2 x = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} \cos x = 0, \\ \sin^2 x = 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi n}{2}, \ n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{\frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}\right\}$.

Пример 2. Решите уравнение $\sin\frac{5\pi x}{4} = x^2 - 4x + 5$.

Решение. Рассмотрим функцию $y = x^2 - 4x + 5$. Имеем $y = = (x-2)^2 + 1$ и $y \geqslant 1$ при любом $x \in \mathbb{R}$, но $\sin\frac{5\pi x}{4} \leqslant 1$ при любом x. Уравнение может иметь решения, только если

$$\begin{cases} (x-2)^2 + 1 = 1, \\ \sin\frac{5\pi x}{4} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ \sin\frac{5\pi x}{4} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Ответ: $\{2\}$.

Пример 3. Решите уравнение $\cos 2x + \cos(2\sqrt{2}x) = 2$.

Решение. $\cos 2x + \cos(2\sqrt{2}x) = 2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}, \\ 2\sqrt{2} = 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi n, \ n \in \mathbb{Z}, \\ \sqrt{2}x = \pi k, \ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Если $n = 0$, то $x = 0$ — решение системы.

Если $n \neq 0$, то $x \neq 0$.

Тогда $\frac{\sqrt{2}x}{x} = \frac{\pi k}{\pi n}$, то есть $\sqrt{2} = \frac{k}{n}$. $\sqrt{2}$ — иррациональное, $\frac{k}{n}$ — рациональное число. Равенство невозможно. При $n \neq 0$ решений нет.

Ответ: $\{0\}$.

Пример 4. Решите уравнение

$$x^2 + 4x\cos(xy) + 4 = 0.$$

Решение. Рассмотрим данное уравнение как квадратное. Дискриминант уравнения равен

$$D = 16\cos^2(xy) - 16 = 16(\cos^2(xy) - 1) = -16\sin^2(xy).$$

Уравнение имеет решение, если

$$-16\sin^2(xy) \geqslant 0 \Leftrightarrow \sin(xy) = 0 \Leftrightarrow xy = \pi n, \ n \in \mathbb{Z}.$$

Тогда при $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{Z}$: $\cos(xy) = -1$ и $x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$. Аналогично при $n = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$: $\cos(xy) = 1$, $x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2 = 0$, $x = -2$.

Имеем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2, \\ xy = 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -2, \\ xy = (2k+1)\pi, \ k \in \mathbb{Z}, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -2, \\ y = \pi k, \ k \in \mathbb{Z}, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2, \\ y = -\pi\left(k + \frac{1}{2}\right), \ k \in \mathbb{Z}, \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $\{(-2; -\pi n) \mid n \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\left(2; \pi\left(k + \frac{1}{2}\right)\right) \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

5. Уравнения, содержащие обратные тригонометрические функции

Задачи, связанные с обратными тригонометрическими функциями, часто вызывают у школьников старших классов значительные трудности. Связано это прежде всего с тем, что в действующих учебниках и учебных пособиях подобным задачам уделяется не слишком большое внимание, и если с задачами на вычисление значений обратных тригонометрических функций учащиеся еще как-то справляются, то уравнения и неравенства, содержащие эти функции, нередко ставят их в тупик. Последнее неудивительно, поскольку практически ни в одном учебнике (включая учебники для классов с углубленным изучением математики) не излагается методика решения даже простейших уравнений и неравенств такого рода. Материал этого пункта, посвященный методам решения уравнений, содержащих обратные тригонометрические функции, призван в какой-то мере восполнить существующий пробел.

Вначале напомним важнейшие свойства обратных тригонометрических функций.

1. Функция $y = \arcsin x$ определена и монотонно возрастает на отрезке $[-1; 1]$;

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x; \quad E(\arcsin) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

2. Функция $y = \arccos x$ определена и монотонно убывает на отрезке $[-1; 1]$;

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x; \quad E(\arccos) = [0; \pi].$$

3. Функция $y = \operatorname{arctg} x$ определена и монотонно возрастает на $\mathbb{R}$;

$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x; \quad E(\operatorname{arctg}) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

4. Функция $y = \operatorname{arcctg} x$ определена и монотонно убывает на $\mathbb{R}$;

$$\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arctg} x; \quad E(\operatorname{arcctg}) = (0; \pi).$$

5. $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$; $\quad \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$.

Свойства монотонности и ограниченности являются ключевыми при решении многих уравнений, содержащих обратные тригонометрические функции. Перейдем к рассмотрению методов решения этих уравнений.

Уравнения, левая и правая части которых являются одноименными обратными тригонометрическими функциями

Решение уравнений, левая и правая части которых представляют собой одноименные обратные тригонометрические функции различных аргументов, основывается прежде всего на таком свойстве этих функций, как монотонность. Напомним, что функции $y = \arcsin t$ и $y = \operatorname{arctg} t$ монотонно возрастают, а функции $y = \arccos t$ и $y = \operatorname{arcctg} t$ монотонно убывают на своих областях определения. Поэтому справедливы следующие равносильные переходы.

1. $\arcsin f(x)=\arcsin g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x), \\ |f(x)|\leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x), \\ |g(x)|\leqslant 1. \end{cases}$

2. $\arccos f(x)=\arccos g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x), \\ |f(x)|\leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x), \\ |g(x)|\leqslant 1. \end{cases}$

3. $\operatorname{arctg} f(x)=\operatorname{arctg} g(x) \Leftrightarrow f(x)=g(x)$.

4. $\operatorname{arcctg} f(x)=\operatorname{arcctg} g(x) \Leftrightarrow f(x)=g(x)$.

Замечание 1. Какой из двух равносильных систем пользоваться при решении уравнений 1 и 2, зависит от того, какое неравенство проще: $|f(x)|\leqslant 1$ (тогда используем первую систему), или $|g(x)|\leqslant 1$ (в этом случае используем вторую систему).

Пример 1. Решить уравнение $\arcsin(3x^2-4x-1)=\arcsin(x+1)$.

Решение. Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 3x^2-4x-1=x+1, \\ |x+1|\leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2-5x-2=0, \\ |x+1|\leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-\frac{1}{3} \end{array}\right. \\ |x+1|\leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{1}{3}.$$

Ответ: $\left\{-\frac{1}{3}\right\}$.

Замечание 2. Решать неравенство системы, вообще говоря, не обязательно. Достаточно проверить, удовлетворяют ли неравенству найденные корни уравнения, как это и было сделано при решении примера 1.

Пример 2. Решить уравнение

$$\arccos(4x^2-3x-2)+\arccos(3x^2-8x-4)=\pi.$$

Решение. Так как $\pi-\arccos t=\arccos(-t)$, то имеет место следующая цепочка равносильных преобразований:

$$\arccos(4x^2-3x-2)=\pi-\arccos(3x^2-8x-4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \arccos(4x^2-3x-2)=\arccos(-3x^2+8x+4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2-3x-2=-3x^2+8x+4, \\ |4x^2-3x-2|\leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x^2-11x-6=0, \\ |4x^2-3x-2|\leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-\frac{3}{7} \end{array}\right. \\ |4x^2-3x-2|\leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow x=-\frac{3}{7}.$$

Ответ: $\left\{-\frac{3}{7}\right\}$.

Аналогичные равносильные преобразования используются и при решении задач с параметрами.

Пример 3. Решить уравнение с параметром a:

$$\arcsin(ax^2-ax+1)+\arcsin x=0.$$

Решение. Уравнение равносильно уравнению

$$\arcsin(ax^2-ax-1)=-\arcsin x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \arcsin(ax^2-ax-1)=\arcsin(-x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ax^2-ax-1=-x, \\ |-x|\leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax^2-(a-1)x-1=0, \\ |-x|\leqslant 1. \end{cases}$$

Рассмотрим два случая:

1) $a=0$. В этом случае система примет вид:

$$\begin{cases} x-1=0, \\ |x|\leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$$

2) $a\neq 0$. В этом случае уравнение системы является квадратным. Его корни:

$$x_1=1 \quad \text{и} \quad x_2=-\frac{1}{a}.$$

Так как $|x|\leqslant 1$, то

$$\left|-\frac{1}{a}\right|\leqslant 1 \Leftrightarrow |a|\geqslant 1.$$

Если $a=-1$, то $x_2=x_1=1$. Если $a\in(-\infty;\,-1)\cup[1;\,\infty)$, то уравнение имеет два корня.

Ответ: при $a\in(-\infty;\,-1)\cup[1;\,\infty)$ $x=1$ и $x=-\frac{1}{a}$; при $a=-1$ и $a=0$ $x=1$; при прочих a решений нет.

Уравнения, левая и правая части которых являются разноименными обратными тригонометрическими функциями

При решении уравнений, левая и правая части которых являются разноименными обратными тригонометрическими функциями, пользуются известными тригонометрическими тождествами. Эта группа задач является чуть более сложной по сравнению с предыдущей. При решении многих уравнений такого рода бывает целесообразно не обсуждать вопрос о равносильности преобразований, а сразу переходить к уравнению-следствию и после его решения делать необходимую проверку. Рассуждения здесь могут быть примерно следующими.

Пусть требуется решить уравнение $\arcsin f(x) = \arccos g(x)$. Предположим, что x_0 — решение этого уравнения. Обозначим $\arcsin f(x_0) = \arccos g(x_0)$ через α. Тогда $\sin\alpha = f(x_0)$, $\cos\alpha = g(x_0)$, откуда $f^2(x_0) + g^2(x_0) = 1$. Итак,

$$\arcsin f(x) = \arccos g(x) \Rightarrow f^2(x) + g^2(x) = 1. \tag{1}$$

Рассуждая аналогично, можно получить следующие переходы:

$$\operatorname{arctg} f(x) = \operatorname{arcctg} g(x) \Rightarrow f(x)g(x) = 1 \tag{2}$$

(использована формула $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\alpha = 1$);

$$\arcsin f(x) = \operatorname{arcctg} g(x) \Rightarrow f^2(x) = \frac{1}{g^2(x)+1} \tag{3}$$

(использована формула $\sin^2\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{ctg}^2\alpha + 1}$);

$$\operatorname{arctg} f(x) = \arccos g(x) \Rightarrow \frac{1}{f^2(x)+1} = g^2(x) \tag{4}$$

(использована формула $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}$);

$$\arcsin f(x) = \operatorname{arctg} g(x) \Rightarrow f^2(x) = \frac{g^2(x)}{g^2(x)+1} \tag{5}$$

(использована формула $\sin^2\alpha = \dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}$);

$$\arccos f(x) = \operatorname{arcctg} g(x) \Rightarrow f^2(x) = \frac{g^2(x)}{g^2(x)+1} \tag{6}$$

(использована формула $\cos^2\alpha = \dfrac{\operatorname{ctg}^2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha + 1}$).

Указание. Корнем каждого из уравнений (1)–(4) может быть только такое число x_0, для которого $f(x_0) \geqslant 0$ и $g(x_0) \geqslant 0$. В противном случае множество значений левой и правой частей уравнения не пересекаются.

Пример 1. Решить уравнение $\arccos\dfrac{7x+5}{13} = \arcsin\dfrac{4x+1}{13}$.

Решение.

$$\arccos\frac{7x+5}{13} = \arcsin\frac{4x+1}{13} \overset{(1)}{\Longrightarrow} \left(\frac{7x+5}{13}\right)^2 + \left(\frac{4x+1}{13}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 65x^2 + 78x - 143 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x = 1,\\ &x = -\frac{143}{65}.\end{aligned}\right.$$

Корень $x=-\dfrac{143}{65}$ является посторонним.

Ответ: $\{1\}$.

Пример 2. Решить уравнение $\arcsin\dfrac{\sqrt{3x+2}}{2}=\operatorname{arcctg}\sqrt{\dfrac{2}{x+1}}$.

Решение.

$$\arcsin\frac{\sqrt{3x+2}}{2}=\operatorname{arcctg}\sqrt{\frac{2}{x+1}}\overset{(4)}{\Longrightarrow}\frac{3x+2}{4}=\frac{1}{1+\frac{2}{x+1}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x^2+7x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}x&=-\tfrac{1}{3},\\x&=-2.\end{aligned}\right.$$

Корень $x=-2$ является посторонним.

Ответ: $\left\{-\frac{1}{3}\right\}$.

Пример 3. Решить уравнение $\operatorname{arctg}(2\sin x)=\operatorname{arcctg}(\cos x)$.

Решение.

$$\operatorname{arctg}(2\sin x)=\operatorname{arcctg}(\cos x)\overset{(2)}{\Longrightarrow}2\sin x\cos x=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sin 2x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\quad n\in\mathbb{Z},\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}x&=\tfrac{\pi}{4}+2\pi n_1,\quad n_1\in\mathbb{Z},\\x&=\tfrac{5}{4}\pi+2\pi n_2,\quad n_2\in\mathbb{Z}.\end{aligned}\right.$$

Корни вида $x=\frac{5}{4}\pi+2\pi n_2$, $n_2\in\mathbb{Z}$, являются посторонними.

Ответ: $\left\{x=\frac{\pi}{4}+2\pi n_1\mid n_1\in\mathbb{Z}\right\}$.

При решении уравнений данного типа, содержащих параметры, становится актуальным вопрос о равносильности преобразований. Чтобы преобразования (1)–(4) сделать равносильными, следует учесть естественные ограничения, связанные с областями определения обратных тригонометрических функций и множествами их значений (см. замечание). Так, например,

$$\arcsin f(x)=\arccos g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f^2(x)+g^2(x)=1,\\f(x)\geqslant 0,\\g(x)\geqslant 0;\end{cases}$$

$$\operatorname{arctg}f(x)=\operatorname{arcctg}g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)g(x)=1,\\f(x)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)g(x)=1,\\g(x)>0.\end{cases}$$

Пример 4. Решить уравнение с параметром a: $\operatorname{arcctg}(x-2a) = \operatorname{arctg}(2x-a)$.

Решение. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} (x-2a)(2x-a) = 1, \\ x-2a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 5ax + 2a^2 - 1 = 0, \\ x > 2a. \end{cases}$$

Графиком квадратного трехчлена $f(x) = 2x^2 - 5ax + 2a^2 - 1$ является парабола, ветви которой направлены вверх. Поскольку $f(2a) = -1 < 0$, то при любом a уравнение $f(x) = 0$ имеет ровно 2 корня, между которыми и заключено число $2a$. Поэтому только больший корень $f(x)$ удовлетворяет условию $x > 2a$. Это корень $x = \dfrac{5a + \sqrt{9a^2+8}}{4}$.

Ответ: при любом a $x = \dfrac{5a + \sqrt{9a^2+8}}{4}$.

Замена переменной

Некоторые уравнения, содержащие обратные тригонометрические функции, можно свести к алгебраическим, сделав соответствующую замену переменной. При этом следует помнить о естественных ограничениях на вводимую переменную, связанных с ограниченностью обратных тригонометрических функций.

Пример 1. Решить уравнение $12\operatorname{arctg}^2\frac{x}{2} = \pi\left(3\pi + 5\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right)$.

Решение. Обозначим $\operatorname{arctg}\frac{x}{2}$ через t; $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$. После преобразований получим уравнение

$$12t^2 - 5\pi t - 3\pi^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} t &= \frac{3}{4}\pi, \\ t &= -\frac{\pi}{3}. \end{aligned}\right.$$

Поскольку $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, получаем $t = -\frac{\pi}{3}$, откуда $\operatorname{arctg}\frac{x}{2} = -\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{x}{2} = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x = -2\sqrt{3}$.

Ответ: $\{-2\sqrt{3}\}$.

Иногда свести уравнение или неравенство к алгебраическому можно с помощью тождества $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ $(|x| \leqslant 1)$. В качестве примера рассмотрим решение **задачи 8 диагностической работы 1.**

Пример 2. Решить уравнение $\arcsin x(4\arcsin x + 3\arccos x) = \pi^2$.

Решение. $3\arcsin x + 3\arccos x = 3\cdot\frac{\pi}{2}$. Обозначим $a=\arcsin x$, где $a\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Тогда

$$a\left(a+\frac{3\pi}{2}\right)=\pi^2 \iff a^2+\frac{3\pi}{2}a-\pi^2=0 \iff \left[\begin{array}{l} a=\frac{\pi}{2},\\ a=-2\pi.\end{array}\right.$$

Таким образом, $\arcsin x=\frac{\pi}{2}$, поскольку $E(\arcsin)=\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Значит, $x=1$.

Ответ: $x=1$.

Пример 3. Решить уравнение $\arcsin x\arccos x=\frac{\pi^2}{18}$.

Решение. Данное уравнение равносильно следующему:

$$\arcsin x\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin x\right)=\frac{\pi^2}{18} \iff 18\arcsin^2 x-9\pi\arcsin x+\pi^2=0.$$

Пусть $\arcsin x=t$, $|t|\leqslant\frac{\pi}{2}$. Тогда

$$18t^2-9\pi t+\pi^2=0 \iff \left[\begin{array}{l} t=\frac{\pi}{3},\\ t=\frac{\pi}{6}.\end{array}\right.$$

Поэтому

$$\left[\begin{array}{l} \arcsin x=\frac{\pi}{3},\\ \arcsin x=\frac{\pi}{6}\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{2},\\ x=\frac{\sqrt{3}}{2}.\end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$.

Применение свойств функций

Решение некоторых уравнений, содержащих обратные тригонометрические функции, основывается исключительно на таких свойствах этих функций, как монотонность и ограниченность. При этом используются следующие теоремы.

Теорема 5.1. *Если функция $y=f(x)$ монотонна, то уравнение $f(x)=c$ ($c=\text{const}$) имеет не более одного решения.*

Теорема 5.2. *Если функция $y=f(x)$ монотонно возрастает, а функция $y=g(x)$ монотонно убывает, то уравнение $f(x)=g(x)$ имеет не более одного решения.*

Теорема 5.3. *Если $\min\limits_X f(x)=c=\max\limits_X g(x)$ ($c=\text{const}$), то на множестве X уравнение $f(x)=g(x)$ равносильно системе* $\begin{cases} f(x)=c,\\ g(x)=c.\end{cases}$

Пример 1. Решить уравнение $2\arcsin 2x = 3\arccos x$.

Решение. Функция $y = 2\arcsin 2x$ является монотонно возрастающей, а функция $y = 3\arccos x$ — монотонно убывающей. Число $x = 0{,}5$ является, очевидно, корнем данного уравнения. В силу теоремы 2 этот корень — единственный.

Ответ: $\{0{,}5\}$.

Пример 2. Решить уравнение

$$\operatorname{arctg}\sqrt{x^2+x} + \arcsin\sqrt{x^2+x+1} = \frac{\pi}{2}.$$

Решение. Пусть $x^2 + x = t$. Тогда уравнение примет вид

$$\operatorname{arctg}\sqrt{t} + \arcsin\sqrt{t+1} = \frac{\pi}{2}.$$

Функции $z = \sqrt{t}$, $z = \sqrt{t+1}$, $y = \operatorname{arctg} z$, $y = \arcsin z$ являются монотонно возрастающими. Поэтому функция $y = \operatorname{arctg}\sqrt{t} + \arcsin\sqrt{t+1}$ также является монотонно возрастающей. В силу теоремы 1 уравнение $\operatorname{arctg}\sqrt{t} + \arcsin\sqrt{t+1} = \frac{\pi}{2}$ имеет не более одного корня. Очевидно, что $t = 0$ является корнем этого уравнения. Поэтому

$$x^2 + x = 0 \iff \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = -1. \end{array}\right.$$

Ответ: $\{-1; 0\}$.

Пример 3. Решить уравнение

$$\arcsin(x(x+y)) + \arcsin(y(x+y)) = \pi.$$

Решение. Поскольку $\arcsin t \leqslant \frac{\pi}{2}$ при $|t| \leqslant 1$, то левая часть уравнения не превосходит $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$. Знак равенства возможен, лишь если каждое слагаемое левой части равно $\frac{\pi}{2}$. Таким образом, уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} \arcsin(x(x+y)) = \frac{\pi}{2}, \\ \arcsin(y(x+y)) = \frac{\pi}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x(x+y) = 1, \\ y(x+y) = 1. \end{cases}$$

Решение последней системы не представляет труда.

Ответ: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Уравнения, сводимые к алгебраическим и тригонометрическим уравнениям

В заключение рассмотрим уравнения, при решении которых используются методы, сходные с методами решения уравнений (2)—(6), но формулы связи, позволяющие получить алгебраическое или тригонометрическое уравнение, являются более сложными.

Пример 1. Решить уравнение $\arccos(3x-4)=2\operatorname{arctg}(5-3x)$.

Решение. Пусть $\operatorname{arctg}(5-3x)=\alpha$. Тогда

$$\operatorname{tg}\alpha = 5-3x, \quad \arccos(3x-4) = 2\alpha, \quad \cos 2\alpha = 3x-4.$$

Таким образом,

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\alpha = 5-3x, \\ \cos 2\alpha = 3x-4. \end{cases}$$

Сложив уравнения этой системы, получим тригонометрическое уравнение

$$\operatorname{tg}\alpha+\cos 2\alpha = 1 \iff \operatorname{tg}\alpha = 2\sin^2\alpha \iff \left[\begin{array}{l} \sin\alpha = 0, \\ \sin 2\alpha = 1. \end{array}\right.$$

Поскольку $2\alpha=\arccos(3x-4)$, а $0\leqslant\arccos t\leqslant\pi$, то $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$. Поэтому последняя система дает значения $\alpha=0$ и $\alpha=\frac{\pi}{4}$. Тогда

$$\left[\begin{array}{l} 3x-4 = \cos 0, \\ 3x-4 = \cos\frac{\pi}{2} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = \frac{5}{3}, \\ x = \frac{4}{3}. \end{array}\right.$$

Оба этих корня удовлетворяют исходному уравнению.

Ответ: $\left\{\frac{4}{3}; \frac{5}{3}\right\}$.

Замечание 5. Второй способ решения уравнения заключается в сведении его к алгебраическому. В самом деле,

$$\cos 2\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}, \quad \cos 2\alpha = 3x-4, \quad \operatorname{tg}\alpha = 5-3x.$$

Поэтому

$$3x-4 = \frac{1-(5-3x)^2}{1+(5-3x)^2} \iff 3x-4 = \frac{(1-5+3x)(1+5-3x)}{1+(5-3x)^2} \iff$$

$$\iff 3x-4 = \frac{(3x-4)(6-3x)}{1-(5-3x)^2} \iff \left[\begin{array}{l} 3x-4 = 0, \\ 1+(5-3x)^2 = 6-3x \end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} x = \frac{4}{3}, \\ (5-3x)^2 = 5-3x \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = \frac{4}{3}, \\ x = \frac{5}{3}. \end{array}\right.$$

Какой из двух способов предпочтительней, следует решать в каждом конкретном случае.

Пример 2. Решить уравнение $\arcsin 2x + \arccos(6x-2) = \frac{5\pi}{6}$.

Решение. Пусть $\arcsin 2x = \alpha$, $\arccos(6x-2) = \beta$. Тогда $\sin\alpha = 2x$, $\cos\beta = 6x-2$, $\alpha+\beta = \frac{5}{6}\pi$. Поэтому $3\sin\alpha - \cos\beta = 2$, $\beta = \frac{5}{6}\pi - \alpha$. Отсюда

$$3\sin\alpha - \cos\left(\frac{5}{6}\pi - \alpha\right) = 2 \iff 3\sin\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha = 2 \iff$$
$$\iff 5\sin\alpha + \sqrt{3}\cos\alpha = 4 \iff \sqrt{3}\cos\alpha = 4 - 5\sin\alpha \iff$$
$$\iff 3\cos^2\alpha = 16 - 40\sin\alpha + 25\sin^2\alpha \iff$$
$$\iff 3(1-\sin^2\alpha) = 16 - 40\sin\alpha + 25\sin^2\alpha \iff$$
$$\iff 28\sin^2\alpha - 40\sin\alpha + 13 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} \sin\alpha = \frac{1}{2}, \\ \sin\alpha = \frac{13}{14}. \end{array}\right.$$

Поскольку $x = \frac{1}{2}\sin\alpha$, то $x = \frac{1}{4}$ или $x = \frac{13}{28}$. Корень $x = \frac{13}{28}$ является посторонним.

Ответ: $\left\{\frac{1}{4}\right\}$.

Замечание 6. 1. Решение уравнений и неравенств, аналогичных разобранному в примере 22, сводится на определенном этапе к решению уравнения вида

$$a\sin\alpha + b\cos\alpha = c.$$

Такие уравнения принято решать методом введения вспомогательного угла (или с помощью универсальной тригонометрической подстановки). При подобном решении ответ, как правило, представляет собой довольно громоздкую формулу (так, в примере 22 мы бы получили, что $\alpha = (-1)^n \arcsin\frac{2}{\sqrt{7}} - \arcsin\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$). Проверка значения α представляет собой в этом случае довольно трудную задачу. Решать подобные уравнения (тем более, если нужно найти лишь $\cos\alpha$ или $\sin\alpha$, а не сами значения α) целесообразно следующим образом. Уединив $a\sin\alpha$ (или $b\cos\alpha$) и возведя обе части получившегося уравнения в квадрат, получим уравнение $a^2\sin^2\alpha = (c - b\cos\alpha)^2$ (или $b^2\cos^2\alpha = (c - a\sin\alpha)^2$), которое элементарно сводится к квадратному относительно $\cos\alpha(\sin\alpha)$ уравнению. При этом полезно учитывать, что возведение в квадрат является равносильным преобразованием, если обе части уравнения неотрицательны или неположительны одновременно. Поэтому

$$a\sin\alpha = c - b\cos\alpha \iff \begin{cases} a^2(1-\cos^2\alpha) = (c-b\cos\alpha)^2, \\ a\sin\alpha(c-b\cos\alpha) \geqslant 0. \end{cases}$$

2. В некоторых случаях отбор корней представляет собой относительно громоздкую задачу. Так, при решении предыдущего примера прямая проверка значения $x=\frac{13}{28}$ приводит к проверке равенства

$$\arcsin\frac{13}{14} + \arccos\frac{11}{14} = \frac{5}{6}\pi.$$

В таких случаях следует обращать внимание на ограничения, возникающие в ходе решения задачи. Так, из условий $-1 \leqslant 2x \leqslant 1$, $-1 \leqslant 6x-2 \leqslant 1$, вытекает, что $\frac{1}{6} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$, а поскольку $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и $\sin\alpha = 2x > 0$, получаем, что α — угол I четверти. Значит, $\cos\alpha > 0$. Но если $\sin\alpha = \frac{13}{14}$, то $\sqrt{3}\cos\alpha = 4 - 5\sin\alpha = 4 - 5\cdot\frac{13}{14} < 0$, что противоречит условию $\cos\alpha > 0$. Следовательно, корень $x=\frac{13}{28}$ является посторонним.

Тригонометрические уравнения

Решите уравнение

1. а) $(2\sin x+1)(2\cos x-3)=0$, б) $(2\sin y-1)(2\cos y-3)=0$.

2. а) $(3\sin x-4)\left(\sqrt{2}\cos x-1\right)=0$, б) $(7\sin x+9)\left(\sqrt{2}\cos x+1\right)=0$.

3. а) $(3\cos x+4)\left(\operatorname{tg} x-\sqrt{3}\right)=0$, б) $(5\cos x-7)\left(\sqrt{3}\operatorname{tg} x+1\right)=0$.

4. а) $(3\sin x-2)(2\sin x-3)=0$, б) $(5\sin y+4)(4\sin y+5)=0$.

5. а) $\sin(-5x)\cos 5x=\frac{1}{2\sqrt{2}}$, б) $\sin(-6y)\cos 6y=\frac{1}{4}$.

6. а) $2\cos^2 6x=2\sin^2 6x+\sqrt{3}$, б) $2\cos^2 2y=2\sin^2 2y-\sqrt{2}$.

7. а) $\sin x(5\cos x+2)=\cos x(5\sin x+2)$,
б) $\sin y(7\cos y-1)=\cos y(7\sin y-1)$.

8. а) $4\cos^2 x-12\cos x+5=0$, б) $10\sin^2 z+9\sin z-7=0$.

9. а) $10\sin^2 z+19\sin z+7=0$, б) $10\cos^2 y-19\cos y+7=0$.

10. а) $2\sin^2 x+5\cos x+1=0$, б) $2\sin^2 y-7\cos y+2=0$.

11. а) $4\cos^2 x-4\sin x-1=0$, б) $4\sin^2 x+12\cos x+3=0$.

12. а) $\cos 2x=5\sin x-2$, б) $\cos 2z=-9\cos z+4$.

13. а) $2\cos 2x=8\cos x+3$, б) $2\cos 2y=4\cos y+1$.

14. а) $7\sin 2y=2\sin y$, б) $9\sin 2x=2\sin x$.

15. а) $(3\cos x+8\sin x)^2=12+55\sin^2 x$,
б) $(3\cos y+7\sin y)^2=12+40\sin^2 y$.

16. а) $\frac{(5x-7\pi)(7x-5\pi)}{\sqrt{\sin x}}=0$, б) $\frac{(7x-8\pi)(8x-7\pi)}{\sqrt{\sin x}}=0$.

17. а) $\frac{(2y+7\pi)(4y+7\pi)(8y+7\pi)}{\sqrt{\cos y}}=0$,
б) $\frac{(2y+9\pi)(4y-9\pi)(13y-9\pi)}{\sqrt{\cos y}}=0$.

18. а) $\frac{4\cos x-3}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}=0$, б) $\frac{7\cos y-5}{\sqrt{\operatorname{tg} y}}=0$.

19. а) $\frac{5\sin x-2}{\sqrt{\cos x}}=0$, б) $\frac{6\sin z+5}{\sqrt{\cos z}}=0$.

20. а) $\frac{\operatorname{tg} x+3}{\sqrt{-\sin x}}=0$, б) $\frac{\operatorname{tg} z+4}{\sqrt{-\cos z}}=0$.

21. а) $\frac{2\sin x-\sqrt{2}}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}=0$, б) $\frac{2\sin z+1}{\sqrt{\operatorname{tg} z}}=0$.

22. а) $\frac{x^2-5x+6}{\sqrt{\cos x}}=0$, б) $\frac{z^2-2z-3}{\sqrt{\sin z}}=0$.

23. а) $\dfrac{9x^2-4}{\sqrt{-\sin x}}=0$, б) $\dfrac{25y^2-16}{\sqrt{-\sin y}}=0$.

24. а) $\dfrac{3\sin^2 x-2\sin x}{\cos x-1}=0$, б) $\dfrac{\sin z(7\sin z-2)}{\cos z-1}=0$.

25. а) $\dfrac{\cos 4x}{\sin 4x+1}=0$, б) $\dfrac{\cos 5x}{\sin 5x-1}=0$.

26. а) $\arccos x=\operatorname{arctg} 3$; б) $\arcsin x=\operatorname{arctg} 2$.

27. а) $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg}\frac{1}{6}=-\frac{\pi}{4}$; б) $\operatorname{arcctg} x+\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\pi}{4}$.

28. а) $\arcsin x-\arcsin\frac{1}{3}=\arcsin 0{,}9$; б) $\arccos x-2\operatorname{arctg} 2=\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$.

29. а) $\arcsin\dfrac{x^2+4x-3}{3}+\arcsin\dfrac{x-3}{3}=0$;
б) $\arccos(4x^2-11x+5)+\arccos(3x^2-14x+7)=\pi$.

30. а) $\operatorname{arctg}(4x^2-8x-9)+\operatorname{arctg} 16x^2=0$;
б) $\operatorname{arctg}\dfrac{x^2-8x-36}{4}+\operatorname{arctg} x^2=0$.

31. а) $\arcsin(2x^3+2x^2-3x-0{,}2)=\arcsin(3x^2-2x-0{,}2)$;
б) $\arccos(2x^3+5x^2+x+0{,}2)=\arccos(2x+4x^2+0{,}2)$.

32. а) $(x^2-5x+6)\arcsin\frac{x}{2}=0$;
б) $(x+2)(2x^2-7x+3)\arccos\frac{x}{2}=0$.

33. а) $\arcsin(\sin x)=\frac{\pi}{2}$; б) $\arcsin(\sin x)=2x-1$.

34. а) $\arcsin(x\sqrt{3})=\frac{\pi}{6x}$; б) $6\arcsin\frac{x}{4}=\pi(3-x)$.

35. а) $\arcsin(x\sqrt{3})+\arcsin x=\frac{\pi}{2}$; б) $\arcsin x+\operatorname{arctg} x=\frac{3}{4}\pi$.

36. а) $\arccos x+\arccos 2x=\frac{\pi}{3}$; б) $\arccos x+\operatorname{arcctg} 4x=\pi$.

37. а) $\arccos^2\frac{x}{3}+4\arcsin^2(x+2)=2\pi^2$;
б) $\arcsin^2 x+\arccos^2(2x-3)=\frac{5}{4}\pi^2$.

38. а) $|\arcsin x|+\arccos x=\frac{\pi}{2}$; б) $\arcsin x+|\arccos x|=\frac{\pi}{2}$.

39. а) $\sin(\arcsin(x+2))+|4x+1|=\frac{19}{4}$;
б) $\cos(\arccos(x-3))+|2x-1|=\frac{13}{2}$.

40. а) $\arcsin(x+1)+\arcsin(y-1)=\pi$;
б) $\arccos(x+y)+\arccos(x-y)=0$.

41. а) $\arcsin\sqrt{3x-2}=\operatorname{arcctg}\sqrt{2x-2}$;
б) $\arccos\dfrac{\sqrt{3x-1}}{2}=\operatorname{arcctg}\sqrt{2x-1}$.

42. а) $\operatorname{arctg}\sqrt{3-x}=\arccos\sqrt{\frac{2x-3}{2}}$;

б) $\operatorname{arcctg}(3x-2)=\operatorname{arctg}(2x-1)$.

43. а) $\arcsin x=2\arccos x$; б) $2\operatorname{arctg}x=\operatorname{arcctg}(x-1)$.

44. а) $\arcsin 2x=3\arcsin x$; б) $\operatorname{arctg}(x-1)=3\operatorname{arctg}(x+1)$.

45. а) $2\arcsin 2x=\arccos 7x$; б) $\arccos(x-1)=2\arccos x$.

46. $\arcsin x=\arccos\sqrt{1-x}$; б) $\arccos\frac{x}{2}=2\operatorname{arctg}(x-1)$.

47. а) $\arcsin x=2\operatorname{arctg}x$; б) $2\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}\frac{x^2}{3}=\pi$.

48. а) $\arcsin\frac{x}{2}+\arccos 2y=\frac{3\pi}{2}$; б) $\arcsin\frac{x}{2}+\arccos 2y=\frac{3\pi}{2}$.

49. а) $\arcsin\frac{x}{3}-\arccos\frac{y}{4}=-\frac{3\pi}{2}$; б) $\arcsin\frac{x}{6}-\arccos\frac{y}{5}=\frac{\pi}{2}$.

50. а) $(\pi+\arcsin x)\arccos y=\frac{3\pi^2}{2}$;

б) $\arcsin^2 x\cdot\arccos y=\frac{\pi^3}{4}$.

Тренировочная работа 5.1

Решите уравнение.

1. $2\cos\left(2x+\frac{\pi}{9}\right)+\sqrt{3}=0.$

2. $\sin\left(\frac{3\pi x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}-\pi x\right).$

3. $(2\sin x-\cos x)(2\cos x-\sin x)=\sin 2x.$

4. $(5\cos x-9)\left(\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x-1\right)=0.$

5. $6\sin^2 x+13\sin x+5=0.$

6. $5\sin 2x=2\cos x.$

7. $\dfrac{(2x-9\pi)(5x-9\pi)(8x-9\pi)}{\sqrt{\cos x}}=0.$

8. $\dfrac{2\sin x+\sqrt{3}}{\sqrt{\mathrm{tg}\,x}}=0.$

9. $\dfrac{\cos 4x}{\sin 4x+1}=0.$

10. $\sqrt{4-5\sin x}=\sqrt{2}\cos x.$

11. $\dfrac{(7y-9\pi)(9y-7\pi)}{\sqrt{\sin y}}=0.$

12. $\dfrac{\cos y(8\cos y-7)}{\sin y+1}=0.$

Тренировочная работа 5.2

Решите уравнение.

1. $\arcsin(27x^2+12x-1)=\arcsin(1-3x)$.

2. $\arccos(4x^2+5x-1)+\arccos(3x^2-2x-9)=\pi$.

3. $\operatorname{arctg}(4x^3-8x-9)+\operatorname{arctg}16x^2=0$.

4. $\arccos(x\sqrt{3})+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}$.

5. $\arcsin x+\arcsin 2x=\dfrac{2}{3}\pi$.

6. $\arcsin^2 x-3\arcsin x+2=0$.

7. $12\arcsin^2 x-8\arcsin x+\pi^2=0$.

8. $\arcsin^2 x+\arccos^2 x=\dfrac{5}{4}\pi^2$.

9. $\operatorname{arctg}\sqrt{8x+1}=\arcsin\sqrt{1-3x}$.

10. $\arcsin x=2\arccos x$.

11. $2\arccos x=\operatorname{arctg}2x$.

12. $\arcsin\dfrac{5x-1}{3}+2\arccos\dfrac{5x-1}{3}=\dfrac{5}{6}\pi$.

§ 5. Показательные уравнения

Этот параграф посвящен показательным уравнениям, т. е. уравнениям, в которых переменная содержится в показателе степени некоторого числа или алгебраического выражения.

Основными методами решения показательных уравнений являются методы группировки, разложения на множители и замены переменной.

Решение большинства показательных уравнений после некоторых преобразований сводится к решению одного или нескольких простейших показательных уравнений вида $a^{f(x)} = b$, которое, если b является степенью числа a, т. е. $b = a^c$, равносильно уравнению $f(x) = c$, а в противном случае — уравнению $f(x) = \log_a b$. К простейшим показательным уравнениям можно отнести и уравнение вида $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ $(a > 0;\ a \neq 1)$, которое равносильно уравнению $f(x) = g(x)$. Заметим, что переход от уравнения $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ к равносильному ему уравнению $f(x) = g(x)$ может быть объяснен различными способами: исходя из свойств показательной функции с основанием a или логарифмированием обеих частей уравнения (по свойствам логарифмической функции).

1. Алгебраические преобразования

Уравнения, непосредственно сводимые к простейшим

Пример 1. Решите уравнение

$$\frac{6^{x^2}}{2^{-15}} = \frac{3^{-15}}{6^{12-12x}}.$$

Решение.

$$6^{x^2} \cdot 6^{12-12x} = 2^{-15} \cdot 3^{-15};$$

$$6^{x^2+12-12x} = 6^{-15};$$

$$x^2 + 12 - 12x = -15;$$

$$x_1 = 3; \quad x_2 = 9.$$

Ответ: 3; 9.

Вынесение общего множителя

Этот метод применяют при решении уравнений вида

$$p \cdot a^{f(x)} + q \cdot a^{f(x)+b} + r = 0$$

и сводимых к ним. После вынесения общего множителя приходим к уравнению $a^{f(x)}(p+q\cdot a^b)+r=0$, откуда

$$a^{f(x)} = -\frac{r}{p+q\cdot a^b}.$$

При отсутствии арифметических ошибок правая часть последнего уравнения, как правило, является степенью числа a. Разумеется, возможны и другие типы уравнений. Рассмотрим примеры.

Пример 2. Решите уравнение $7^{x+2}+4\cdot 7^{x+1}=539$.

Решение. Вынесем общий множитель и выполним преобразования:

$$\begin{aligned}
&7^{x+1}(7+4) = 539;\\
&11\cdot 7^{x+1} = 539;\\
&7^{x+1} = 49;\\
&7^{x+1} = 7^2;\\
&x+1 = 2;\\
&x = 1.
\end{aligned}$$

Ответ: 1.

Группировка и разложение на множители

Основная идея решения задач этого типа отражена в названии: после группировки и вынесения общих множителей такие уравнения обычно удается привести к виду $f(x)\cdot g(x)=0$, а последнее уравнение — к одному или двум простейшим показательным уравнениям. Такие уравнения схожи с уравнениями предыдущего типа, но требуют большего числа действий. В качестве первого примера рассмотрим решение **задачи 9 части I** вводной диагностической работы.

Пример 3. Решите уравнение

$$x\cdot 2^x+3 = 3\cdot 2^x+x.$$

Решение. Перенесем выражение из правой части уравнения в левую и сгруппируем слагаемые: $(x\cdot 2^x-3\cdot 2^x)-(x-3)=0$. Вынесем общий множитель: $2^x(x-3)-(x-3)=0$. Еще раз вынесем общий множитель: $(x-3)(2^x-1)=0$, откуда $\left[\begin{array}{l} x-3=0,\\ 2^x-1=0,\end{array}\right.$ и, значит, $\left[\begin{array}{l} x=3,\\ x=0.\end{array}\right.$

Ответ: 3; 0.

Пример 4. Решите уравнение $x\cdot 3^{-x}-3x+3\sqrt{x}-\sqrt{x}\cdot 3^{-x}=0$.

Решение.

$$x\cdot 3^{-x}-3x+3\sqrt{x}-\sqrt{x}\cdot 3^{-x}=0 \Leftrightarrow x(3^{-x}-3)-\sqrt{x}(3^{-x}-3)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (3^{-x}-3)(x-\sqrt{x})=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} 3^{-x}-3=0, \\ x-\sqrt{x}=0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} 3^{-x}=3, \\ \sqrt{x}=x \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=0, \\ x=1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=1. \end{array}\right.$$

Ответ: 0; 1.

2. Замена переменной

Большинство показательных уравнений, в которых используется замена переменной, сводится после этой замены к квадратному уравнению. Найдя корни этого уравнения и выполнив обратную замену получают одно или два простейших показательных уравнения. Так уравнение $a\cdot l^{2x}+b\cdot l^{x}+c=0$ сводится к квадратному уравнению заменой $y=l^{x}$, $y>0$. Для решения однородного уравнения вида

$$p\cdot a^{2x}+q\cdot (ab)^{x}+r\cdot b^{2x}=0$$

нужно обе его части разделить на b^{2x} (заметим, что по свойству показательной функции $b^{2x}\neq 0$ ни при каких x). После деления получится уравнение

$$p\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^{2x}+q\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^{x}+r=0,$$

которое заменой $y=\left(\frac{a}{b}\right)^{x}$, $y>0$, сводится к квадратному уравнению относительно y.

Пример 1. Решите уравнение

$$3^{2x+1}-26\cdot 3^{x}-9=0.$$

Решение. $3\cdot 3^{2x}-26\cdot 3^{x}-9=0$.
Пусть $3^{x}=y$, $y>0$. Тогда

$$\begin{cases} 3y^{2}-26y-9=0, \\ y>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=9, \\ y=-\frac{1}{3}, \end{array}\right. \\ y>0 \end{cases} \Leftrightarrow y=9.$$

Сделаем обратную замену: $3^x=9 \Leftrightarrow x=2$.

Ответ: 2.

Пример 2. Решите уравнение

$$4^{2/x}-5\cdot 4^{1/x}+4=0.$$

Решение. Запишем данное уравнение в виде

$$(4^{1/x})^2-5\cdot 4^{1/x}+4=0.$$

Пусть $t=4^{1/x}$. Уравнение примет вид $t^2-5t+4=0$, откуда $t=1$ либо $t=4$. Сделаем обратную замену: $4^{1/x}=4$, откуда $x=1$, либо $4^{1/x}=1$. Последнее уравнение не имеет корней.

Ответ: 1.

В качестве следующего примера рассмотрим **задачу 10 части I** вводной диагностической работы.

Пример 3. Решите уравнение $4^{\sin x}+2^{5-2\sin x}=18$.

Решение. Перепишем данное уравнение в виде

$$4^{\sin x}+2^5\cdot 2^{-2\sin x}-18=0,$$

откуда $4^{\sin x}+32\cdot 4^{-\sin x}-18=0$. Поскольку $4^{\sin x}>0$, можно умножить обе части последнего уравнения на $4^{\sin x}$, после чего получим уравнение $(4^{\sin x})^2-18\cdot 4^{\sin x}+32=0$. Пусть $t=4^{\sin x}$. Уравнение примет вид $t^2-18t+32=0$, откуда $t=2$ либо $t=16$. Сделаем обратную замену: $4^{\sin x}=2$, откуда $\sin x=\frac{1}{2}$ и $x=(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, либо $4^{\sin x}=16$, откуда $\sin x=2$, что невозможно.

Ответ: $x=(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

Пример 4. Решите уравнение

$$\left(\sqrt{5+\sqrt{24}}\right)^x+\left(\sqrt{5-\sqrt{24}}\right)^x=10.$$

Решение. Умножим обе части уравнения на $\left(\sqrt{5+\sqrt{24}}\right)^x$. Получим $\left(\sqrt{5+\sqrt{24}}\right)^{2x}+1=10\left(\sqrt{5+\sqrt{24}}\right)^x$. Сделаем замену переменной. Пусть $\left(\sqrt{5+\sqrt{24}}\right)^x=y$, $y>0$. Тогда

$$\begin{cases} y^2-10y+1=0, \\ y>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=5\pm\sqrt{24}, \\ y>0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=5+\sqrt{24}, \\ y=5-\sqrt{24}. \end{array}\right.$$

Обратная замена $\left[\begin{array}{l}\left(\sqrt{5+\sqrt{24}}\right)^x=5+\sqrt{24},\\ \left(\sqrt{5+\sqrt{24}}\right)^x=\dfrac{1}{5+\sqrt{24}}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2,\\ x=-2.\end{array}\right.$

Ответ: -2; 2.

Пример 5. Решите уравнение

$$3^{2x+1}-5\cdot 6^x+2^{2x+1}=0.$$

Решение. $3^{2x+1}-5\cdot 6^x+2^{2x+1}=0 \Leftrightarrow 3\cdot 3^{2x}-5\cdot 3^x\cdot 2^x+2\cdot 2^{2x}=0.$ Разделим обе части уравнения на 2^{2x}:

$$3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}-5\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^x+2=0.$$

Пусть $\left(\frac{3}{2}\right)^x=y$, $y>0$. Уравнение примет вид $3y^2-5y+2=0$, откуда $y_1=\frac{2}{3}$; $y_2=1$. Вернемся к прежней переменной:

$$\left[\begin{array}{l}\left(\frac{3}{2}\right)^x=\frac{2}{3},\\ \left(\frac{3}{2}\right)^x=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1,\\ x=0.\end{array}\right.$$

Ответ: -1; 0.

3. Отбор корней в показательных уравнениях

Иногда встречаются комбинированные уравнения, в которых неизвестная содержится не только в показателе степени, но и в знаменателе дроби или под знаком корня четной степени. В простейших случаях это не влияет существенным образом на уровень сложности задания, но приводит к необходимости ввода дополнительных ограничений (условия неравенства нулю знаменателя дроби, условия неотрицательности подкоренного выражения для корня четной степени). В этих случаях следует проявлять внимание и осторожность: ведь часть найденных корней может не удовлетворять указанным ограничениям. Такие корни будут посторонними, включение их в ответ является грубой математической ошибкой, и решение не будет засчитано.

Пример 1. Решите уравнение $(2^{x^2}-4\cdot 2^x)\cdot\sqrt{\frac{9}{4}-x^2}=0.$

Решение.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2^{x^2}-4\cdot 2^x=0,\\ \frac{9}{4}-x^2\geqslant 0,\end{cases}\\ \frac{9}{4}-x^2=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2^{x^2}=2^{x+2},\\ x^2\leqslant\frac{9}{4},\end{cases}\\ x^2=\frac{9}{4}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2=x+2,\\ |x|\leqslant\frac{3}{2},\end{cases}\\ x=\frac{3}{2},\\ x=-\frac{3}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=-1, x=2;\\ |x|\leqslant 1{,}5;\end{cases}\\ x=1{,}5,\\ x=-1{,}5\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1{,}5,\\ x=-1,\\ x=1{,}5.\end{array}\right.$$

Ответ: $-1{,}5$; -1; $1{,}5$.

Пример 2. Решите уравнение $|4^x-2|=4^{x+1}-3$.

Решение. Пусть $4^x=y$, $y>0$. Тогда

$$\begin{cases}y>0,\\ |y-2|=4y-3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y>0,\\ 4y-3\geqslant 0,\\ \left[\begin{array}{l}y-2=4y-3,\\ y-2=3-4y\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y\geqslant\frac{3}{4},\\ \left[\begin{array}{l}y=\frac{1}{3},\\ y=1\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow y=1.$$

Вернемся к прежней переменной: $4^x=1 \Leftrightarrow x=0$.

Ответ: 0.

4. Применение свойств функций

Некоторые уравнения, в том числе и показательные, не могут быть решены стандартными методами, изложенными выше. В таких случаях часто приходится использовать такие свойства функций, как монотонность и ограниченность.

Пример 1. Решите уравнение $3^{x-1}+5^{x-1}=34$.

Решение. Функция $f(x)=3^{x-1}+5^{x-1}$ возрастает на $\mathbb{R}$. Значение функции в точке $x=3$

$$f(3)=3^2+5^2=34.$$

Следовательно, $x=3$ — единственный корень.

Ответ: 3.

Пример 2. Решите уравнение $4^x + 5^x = 9^x$.

Решение. Довольно легко заметить, что $x = 1$ — корень уравнения. Попробуем доказать, что других корней нет. Для доказательства используем свойство монотонности показательной функции. Разделим обе части уравнения на 9^x:

$$\left(\frac{4}{9}\right)^x + \left(\frac{5}{9}\right)^x = 1.$$

Функция $y(x) = \left(\frac{4}{9}\right)^x + \left(\frac{5}{9}\right)^x$ монотонно убывает (как сумма двух монотонно убывающих функций), поэтому каждое свое значение она принимает ровно один раз. Поскольку $y(1) = 1$, то $x = 1$ — единственный корень уравнения $\left(\frac{4}{9}\right)^x + \left(\frac{5}{9}\right)^x = 1$, а значит, и данного уравнения.

Ответ: 2.

Пример 3. Решите уравнение $2^{x^2+1} + |x| = 2$.

Решение. Даже если бы в уравнении не было знака модуля, решить его стандартным образом было бы невозможно. Поскольку $x^2 + 1 \geqslant 1$ (и, значит, $2^{x^2+1} \geqslant 2$), а $|x| \geqslant 0$ при всех значениях переменной, получим, что левая часть уравнения не меньше 2. Знак равенства возможен, только если каждое из слагаемых левой части принимает свое наименьшее значение, откуда

$$\begin{cases} 2^{x^2+1} = 2, \\ |x| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

Ответ: 0.

Показательные уравнения

Решите уравнение

1. а) $7\cdot 5^x=5\cdot 7^x$, б) $2\cdot 7^y=7\cdot 2^y$.

2. а) $\dfrac{5^{x+25}}{19}=\dfrac{5}{19^{x+25}}$, б) $\dfrac{9^{y+22}}{17}=\dfrac{9}{17^{y+22}}$.

3. а) $\dfrac{17^{18-x}}{19}=\dfrac{19^{18-x}}{17}$, б) $\dfrac{16^{27-x}}{11}=\dfrac{11^{27-x}}{16}$.

4. а) $8^{x+1}-5\cdot 8^x=192$, б) $3^{y+3}-2\cdot 3^y=225$.

5. а) $\left(\dfrac{3}{7}\right)^{5x+7}=\left(\dfrac{2}{5}\right)^{5x+7}$, б) $\left(\dfrac{4}{7}\right)^{2y-5}=\left(\dfrac{5}{8}\right)^{2y-5}$.

6. а) $5^{13y-4}\cdot 4^{4y+13}=5^{5y+4}\cdot 4^{12y+5}$,
б) $9^{11x+2}\cdot 8^{5x+3}=9^{3x+10}\cdot 8^{13x-5}$.

7. а) $11^x-12\cdot 11^x+1=0$, б) $15^y-16\cdot 15^y+1=0$.

8. а) $4\cdot 9^x-6^x-3\cdot 2^x=0$, б) $3\cdot 16^y+5\cdot 12^y-12\cdot 9^y=0$.

9. а) $4^{x+1}+15\cdot 2^x-4=0$, б) $4^{x+1}+11\cdot 2^x-3=0$.

10. а) $49^{x+0,5}-8\cdot 49^{\frac{x}{2}}+1=0$, б) $16^{x+1,5}-65\cdot 64^{\frac{x}{3}}+1=0$.

11. а) $\dfrac{3^{x^2}-3}{x-1}=0$, б) $\dfrac{7^{x^2}-7}{x-1}=0$.

12. а) $\dfrac{(7^x-49)(4^{-x}-16)}{\sqrt{7-4x}}=0$, б) $\dfrac{(4^y-64)(3^{-y}-81)}{\sqrt{4-3x}}=0$.

13. а) $(2x-3)5^{3x-2}=2x-3$, б) $(4y+5)\cdot 9^{5y-4}=4y+5$.

14. а) $\dfrac{7^{x^2-x}}{x-2}=\dfrac{49}{x-2}$, б) $\dfrac{2^{x^2+4x}}{x+5}=\dfrac{32}{x+5}$.

15. а) $\dfrac{7^{x^2-13}}{5^{\sqrt{x}}}=\dfrac{343}{5^{\sqrt{x}}}$, б) $\dfrac{9^{y^2-7}}{5^{\sqrt{y}}}=\dfrac{81}{5^{\sqrt{y}}}$.

16. а) $\dfrac{19^{x^2}}{x-3}=\dfrac{19^{3x}}{x-3}$, б) $\dfrac{11^{x^2}}{x-7}=\dfrac{11^{7x}}{x-7}$.

17. а) $\dfrac{(3^{x+1}-1)(4^{x+2}-2)}{7^{2x+5}-7}=0$, б) $\dfrac{(2^{x-2}-4)(25^{x-2}-25)}{3^{7x-26}-3^2}=0$.

18. а) $\dfrac{(x+2)(x-5)}{\sqrt[5]{3^x}-3}=0$, б) $\dfrac{(z-2)(z-6)}{\sqrt[6]{5^z}-5}=0$.

19. а) $\dfrac{\left(\sqrt[3]{3^x}-3\right)\left(\sqrt[5]{5^x}-25\right)}{x-10}=0$, б) $\dfrac{\left(\sqrt[9]{4^y}-64\right)\left(\sqrt[8]{5^y}-5\right)}{y-8}=0$.

20. а) $\dfrac{(4^z-32)(7^z-49^4)}{(2z-5)(8z-3)}=0$, б) $\dfrac{(16^x-64)(9^x-81^8)}{(2x-3)(4x-5)}=0$.

21. а) $\dfrac{13^{y^2-9y+18}-15^{y^2-9y+18}}{y-6}=0$, б) $\dfrac{11^{x^2-2x-24}-12^{x^2-2x-24}}{x+4}=0$.

22. а) $\dfrac{29^{x^2-81}-1}{x-9}=0$, б) $\dfrac{17^{y^2-4}-1}{y-2}=0$.

23. а) $\dfrac{5^{x^2-3}-5}{\sqrt{3-x}-1}=0$, б) $\dfrac{2^{y^2-1}-8}{\sqrt{6+y}-2}=0$.

24. а) $(x+1)(x-6)\cdot 8^{\sqrt{3-x}}=0$, б) $(z+7)(z-4)\cdot 5^{\sqrt{3-z}}=0$.

25. а) $\dfrac{x^2}{6^x-36}=\dfrac{4}{6^x-36}$, б) $\dfrac{y^2}{2^y-64}=\dfrac{36}{2^y-64}$.

Тренировочная работа 6

Решите уравнение

1. $\frac{9^{x+20}}{11}=\frac{9}{11^{x+20}}$.

2. $3^{8x-5}\cdot 7^{x+4}=3^{2x+1}\cdot 7^{7x-2}$.

3. $25^{x+1}+24\cdot 5^x-1=0$.

4. $\frac{(5^x-25)(7^{-x}-7)}{\sqrt{5-7x}}=0$.

5. $\frac{11^{x^2-2}}{13^{\sqrt{x}}}=\frac{121}{13^{\sqrt{x}}}$.

6. $\frac{(4^x-2^5)(3^x-9^7)}{(2x-5)(9x-7)}=0$.

7. $\frac{13^{x^2+3x+2}-11^{x^2+3x+2}}{x+1}=0$.

8. $(x-3)(x-6)\cdot 9^{\sqrt{x-4}}=0$.

9. $36^x-4\cdot 6^x-12=0$.

10. $2^{\sin^2 x}+2^{\cos^2 x}=3$.

11. $9^{x^2-1}-36\cdot 3^{x^2-3}+3=0$.

12. $2^x\cdot 9^{\sqrt{x}}+3=3\cdot 2^x+9^{\sqrt{x}}$.

§ 6. Логарифмические уравнения

Основная идея решения любого логарифмического уравнения — сведение его к одному или нескольким простейшим уравнениям, а основными средствами реализации этой идеи являются следующие:

- равносильные преобразования,
- переход к уравнению-следствию,
- разложение на множители,
- замена переменной,
- применение свойств функций.

Решение большинства логарифмических уравнений после некоторых преобразований сводится к решению логарифмического уравнения вида $\log_{h(x)} f(x) = \log_{h(x)} g(x)$ или совокупности таких уравнений. Приведем соответствующее равносильное преобразование:

$$\log_{h(x)} f(x) = \log_{h(x)} g(x) \iff \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0, \\ h(x) > 0, \\ h(x) \neq 1. \end{cases}$$

Второе неравенство системы можно заменить неравенством $g(x) > 0$ (какое из двух неравенств выбрать, зависит от того, какая из функций имеет более простой вид). Для частных случаев равносильные системы становятся менее громоздкими. Укажем основные частные случаи (a и b — числа, $a > 0$, $a \neq 1$):

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \iff \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0, \end{cases}$$

$$\log_{h(x)} f(x) = b \iff \begin{cases} f(x) = (h(x))^b, \\ h(x) > 0, \\ h(x) \neq 1, \end{cases}$$

$$\log_a f(x) = b \iff f(x) = a^b.$$

1. Алгебраические преобразования

Прежде чем переходить к примерам решения задач по теме, сделаем несколько важных замечаний.

При решении уравнений, содержащих сумму двух и более логарифмов, следует помнить о том, что равенство

$$\log_a f(x) + \log_a g(x) = \log_a (f(x)g(x))$$

ıыполняется не при любых значениях переменной, поскольку обла-:ти определения его левой и правой частей различны. Левая часть ɔпределена при $f(x)>0$, $g(x)>0$ (каждая из функций положительна). Ιравая часть определена при $f(x)\cdot g(x)>0$ (каждая из функций по-ıожительна либо каждая из функций отрицательна). Таким образом, ɔбласть определения правой части равенства

$$\log_a f(x)+\log_a g(x)=\log_a(f(x)g(x))$$

ıире области определения его левой части. Поэтому при решении ˊравнения переход от суммы логарифмов к логарифму произведения ıожет привести к приобретению посторонних корней. Чтобы этого ıe случилось, нужно в самом начале решения выписать соответству-ощие неравенства (ОДЗ) или, получив корни, сделать проверку. Ιреобразование же логарифма произведения в сумму логарифмов то есть переход от $\log_a(f(x)g(x))$ к $\log_a f(x)+\log_a g(x)$) таит еще ольше опасностей: в этом случае область допустимых значений ıеременной сужается, и при решении уравнения можно потерять :орни. Поэтому, если такое преобразование все-таки необходимо, ıасто приходится рассматривать два случая: а) $f(x)>0$, $g(x)>0$ в этом случае $\log_a(f(x)g(x))=\log_a f(x)+\log_a g(x)$) и б) $f(x)<0$, $\cdot(x)<0$ (при этом $\log_a(f(x)g(x))=\log_a(-f(x))+\log_a(-g(x))$). Сде-:анные рекомендации остаются в силе и для случая преобразования ıазности логарифмов в логарифм частного и наоборот.

При решении уравнений, содержащих выражения вида $\log_a f^{2n}(x)$, ледует использовать формулу $\log_a f^{2n}(x)=2n\cdot\log_a|f(x)|$. Если не по-тавить знак модуля, то получится равенство, в котором левая часть ıпределена при всех x, для которых $f(x)\neq 0$, а правая часть — при ˌсех x, для которых $f(x)>0$, то есть область определения левой части ıкажется шире, что может привести к потере корней при решении оответствующего уравнения.

При переходе к уравнению-следствию целесообразно начинать ре-ıение с выписывания необходимых ограничений (области допусти-ıых значений, или ОДЗ, — при всей спорности такого довольно проч-ıо укоренившегося в разного рода пособиях словосочетания и соот-ˌетствующей ему аббревиатуры).

Переход к уравнению-следствию

Пример 1. Решите уравнение $\lg(x-9)+\lg(2x-1)=2$.

Решение. Начнем с нахождения ОДЗ: $\begin{cases} x-9>0, \\ 2x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>9.$

Далее, $\lg(x-9)+\lg(2x-1)=2 \Rightarrow \lg(x-9)(2x-1)=2$, откуда $(x-9)(2x-1)=10^2$ и $2x^2-19x-91=0$.

Корни квадратного уравнения:

$x_1=-\frac{7}{2}$ — не удовлетворяет условию $x-9>0$; $x_2=13$.

Ответ: 13.

Равносильные преобразования

Пример 2. Решите уравнение $\lg(x^2-3x+1)=\lg(2x-5)$.

Решение. $\lg(x^2-3x+1)=\lg(2x-5) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x+1=2x-5, \\ 2x-5>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5x+6=0, \\ x>2\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=3, \end{array}\right. \\ x>2\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x=3.$$

Ответ: 3.

Пример 3. Решите уравнение $\log_3(x-5)^2=2$.

Решение. Способ 1.

$$\log_3(x-5)^2=2 \Leftrightarrow (x-5)^2=9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-5=3, \\ x-5=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=8, \\ x=2. \end{array}\right.$$

Способ 2. $\log_3(x-5)^2=2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2\log_3|x-5|=2 \Leftrightarrow \log_3|x-5|=1 \Leftrightarrow |x-5|=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=8, \\ x=2. \end{array}\right.$$

Ответ: 2; 8.

В качестве следующего примера рассмотрим **задание 11 части I** вводной диагностической работы.

Пример 4. Решите уравнение

$$\log_3(x^2-12)+0{,}5\log_{\frac{1}{3}} x^2=0.$$

Решение. Воспользовавшись свойствами логарифмов, перепишем уравнение в виде

$$\log_3(x^2-12)-\log_3|x|=0,$$

откуда

$$\log_3(x^2-12)=\log_3|x| \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-12=|x|, \\ x\neq 0. \end{cases}$$

Из уравнения системы находим $|x|=4$ (откуда $x=\pm 4$) либо $|x|=-3$, что невозможно.

Ответ: -4; 4.

Пример 5. Решите уравнение $\log_2\left(\log_{\frac{1}{2}}(\log_{625}(x^2+x-1))\right)=1$.

Решение. $\log_2\left(\log_{\frac{1}{2}}(\log_{625}(x^2+x-1))\right)=1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}\left(\log_{625}(x^2+x-1)\right) = 2 \Leftrightarrow \log_{625}(x^2+x-1) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+x-1 = 625^{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow x^2+x-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x=-3,\\ &x=2.\end{aligned}\right.$$

Ответ: $\{-3; 2\}$.

Группировка и разложение на множители

Пример 6. Решите уравнение $\lg x - x + x\lg x - 1 = 0$.

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$(\lg x + x\lg x) - (x+1) = 0 \Leftrightarrow \lg x\cdot(x+1)-(x+1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(\lg x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{aligned} &x+1=0,\\ &\lg x - 1 = 0,\end{aligned}\right. \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{aligned} &x=-1,\\ &x=10,\end{aligned}\right. \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 10.$$

Ответ: 10.

Пример 7. Решите уравнение $\dfrac{\lg x}{\log_x 2} - \lg 10 + \log_2 x - \lg x = 0$.

Решение. По свойствам логарифмов $\dfrac{1}{\log_x 2} = \log_2 x$. Перепишем уравнение в виде

$$\lg x\cdot \log_2 x - 1 + \log_2 x - \lg x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lg x(\log_2 x - 1) + (\log_2 x - 1) = 0 \Leftrightarrow (\lg x + 1)(\log_2 x - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &\lg x = -1,\\ &\log_2 x = 1\end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x=0{,}1,\\ &x=2.\end{aligned}\right.$$

Ответ: 0,1; 2.

2. Замена переменной

Подавляющее большинство логарифмических уравнений, решаемых с помощью замены переменной, сводится к квадратным уравнениям. Рассмотрим примеры.

Пример 1. Решите уравнение $\log_2^2 x - 2\log_2 x - 3 = 0$.

Решение. Введем новую переменную. Пусть $\log_2 x = y$. Получим уравнение $y^2 - 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -1, \\ y = 3. \end{array}\right.$

Сделаем обратную замену: $\left[\begin{array}{l} \log_2 x = -1, \\ \log_2 x = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{2}, \\ x = 8. \end{array}\right.$

Ответ: $\frac{1}{2}$; 8.

Пример 2. Решите уравнение $\log_4^2 x - \log_4 \sqrt{x} - 1{,}5 = 0$.

Решение. Перепишем уравнение в виде $\log_4^2 x - \frac{1}{2}\log_4 x - 1{,}5 = 0$. Пусть $\log_4 x = v$. Уравнение примет вид $v^2 - \frac{1}{2}v - 1{,}5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v = -1, \\ v = \frac{3}{2}. \end{array}\right.$

Вернемся к прежней переменной:

$$\left[\begin{array}{l} \log_4 x = -1, \\ \log_4 x = \frac{3}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4^{-1}, \\ x = 4^{\frac{3}{2}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{4}, \\ x = 8. \end{array}\right.$$

Ответ: $\frac{1}{4}$; 8.

В качестве следующего примера рассмотрим решение **задачи 12 части I** вводной диагностической работы.

Пример 3. Решите уравнение $\log_x 2 - \log_4 x + \frac{7}{6} = 0$.

Решение. Вначале приведем логарифмы к основанию 2:

$$\log_x 2 - \log_4 x + \frac{7}{6} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\log_2 x} - \frac{1}{2}\log_2 x + \frac{7}{6} = 0.$$

Пусть $\log_2 x = y$. Уравнение примет вид

$$\frac{1}{y} - \frac{1}{2}y + \frac{7}{6} = 0 \Leftrightarrow 3y^2 - 7y - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -\frac{2}{3}, \\ y = 3. \end{array}\right.$$

Вернемся к прежней переменной: $\left[\begin{array}{l}\log_2 x=-\frac{2}{3},\\ \log_2 x=3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2^{-\frac{2}{3}},\\ x=8.\end{array}\right.$

Ответ: 8; $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$.

Пример 4. Решите уравнение $\log_4(2\cdot 4^{x-2}-1)=2x-4$.

Решение. $\log_4(2\cdot 4^{x-2}-1)=2x-4 \Leftrightarrow 2\cdot 4^{x-2}-1=4^{2x-4}$. Пусть $4^{x-2}=y$, $y>0$. Тогда $\begin{cases} y^2-2y+1=0,\\ y>0\end{cases} \Leftrightarrow y=1$. Вернемся к прежней переменной: $4^{x-2}=1 \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2$.

Ответ: 2.

3. Отбор корней в логарифмических уравнениях

Пример 1. Решите уравнение

$$\log_2(4-x)^2+2\log_2(2x-1) = 4\log_2 3.$$

Решение. ОДЗ $\begin{cases} x\neq 4,\\ x>\frac{1}{2}.\end{cases}$

$$2\log_2|4-x|+2\log_2(2x-1) = 4\log_2 3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \log_2(|4-x|\cdot(2x-1)) = 2\log_2 3 \Leftrightarrow |4-x|\cdot(2x-1) = 9.$$

Рассмотрим два случая.

Если $x>4$, то $(x-4)(2x-1)=9 \Leftrightarrow 2x^2-9x-5=0$, откуда $x=5$ либо $x=-0{,}5$. Корень $x=-0{,}5$ не удовлетворяет неравенству $x>4$.

Если $x<4$, то $(4-x)(2x-1)=9 \Leftrightarrow 2x^2-9x+13=0$. Последнее уравнение не имеет корней.

Ответ: 5.

Пример 2. Решите уравнение $\log_{x-1} x^2=\log_{x-1}(6x-8)$.

Решение. $\log_{x-1} x^2=\log_{x-1}(6x-8) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 6x-8,\\ x^2>0,\\ x-1>0,\\ x-1\neq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-6x+8=0,\\ x\neq 0,\\ x>1,\\ x\neq 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=2,\\ x=4,\end{array}\right.\\ x>1,\\ x\neq 2\end{cases} \Leftrightarrow x=4.$$

Ответ: 4.

4. Применение свойств функций

Пример 1. Решите уравнение

$$\log_2 x = \frac{2}{x}.$$

Решение. Из условия следует, что $x \in (0; +\infty)$. На этом промежутке функция $f(x) = \log_2 x$ монотонно возрастает, а функция $g(x) = \frac{2}{x}$ монотонно убывает. Поэтому уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не более одного корня. Поскольку $f(2) = g(2)$, $x = 2$ — единственный корень уравнения.

Ответ: 2.

Пример 2. Решите уравнение

$$\log_3(x^2 - 6x + 12) = \cos(2\pi x).$$

Решение. Поскольку

$$x^2 - 6x + 12 = (x-3)^2 + 3 \geqslant 3,$$

получим

$$\log_3(x^2 - 6x + 12) \geqslant 1.$$

Но

$$\cos(2\pi x) \leqslant 1.$$

Поэтому уравнение имеет решение только в том случае, если

$$\begin{cases} \log_3(x^2 - 6x + 12) = 1, \\ \cos(2\pi x) = 1. \end{cases}$$

Единственным корнем первого уравнения системы является $x = 3$, который удовлетворяет и ее второму уравнению.

Ответ: 3.

Логарифмические уравнения

1. а) $\log_{4-x}(2x^2-9x+10)=0$, б) $\log_{4-y}(3y^2-7y-5)=0$.

2. а) $\log_{19}y^4=\log_{19}(19y)^2$, б) $\log_{18}z^4=\log_{18}(16z)^2$.

3. а) $\log_{17}x=\dfrac{1}{\log_{17}x}$, б) $\log_{25}z=\dfrac{1}{\log_{25}z}$.

4. а) $x^2+\log_5 x+\log_5\dfrac{25}{x}=11$, б) $y^2+\log_6 y+\log_6\dfrac{36}{y}=83$.

5. а) $\log_3(x^2-12)=\log_3(-x)$, б) $\log_3(y^2-35)=\log_3(2y)$.

6. а) $\log_{23}^2 x=\dfrac{1}{\log_x 23}$, б) $\log_{13}^2 y=\dfrac{1}{\log_y 13}$.

7. а) $\log_{11}(x^2-5x+6)=\log_{11}(x-2)$,
б) $\log_{11}(y^2+9y+18)=\log_{11}(y+6)$.

8. а) $\log_7^2 x-\log_7 x^3+2=0$, б) $\log_2^2 z-\log_2 z^{-7}+12=0$.

9. а) $\log_4^2(4x-1)=\log_4(4x-1)^3$, б) $\log_7^2(7y-5)=\log_7(7y-5)^2$.

10. а) $\log_{y^2}13=\log_{9+8y}13$, б) $\log_{y^2}17=\log_{4+3y}17$.

11. а) $\dfrac{(x+6)(x+7)}{\log_7(x+8)}=0$, б) $\dfrac{(z-9)(z+7)}{\log_3(z+8)}=0$.

12. а) $(x+1)\log_{x+2}(x+3)=0$, б) $(x+5)(x+2)\log_{-1-x}(x+9)=0$.

13. а) $(x+2)(x-5)\log_{6-x}(x+7)=0$,
б) $(x-9)(x+2)\log_{x+3}(x+4)=0$.

14. а) $(x-1)\log_{x+6}(x-7)=0$, б) $(x+8)\log_{x+4}(x+1)=0$.

15. а) $\dfrac{(y+11)(y+19)}{\log_{14}(y+17)}=0$, б) $\dfrac{(x-11)(x+21)}{\log_{17}(x+13)}=0$.

16. а) $(x-5)\log_4(x-5)=0$, б) $(x-8)\log_9(x-8)=0$.

17. а) $\log_9(z^2-24)=\log_9(-2z)$, б) $\log_8(x^2-18)=\log_8(3x)$.

18. а) $(x^2-4)\ln(1-x)=0$, б) $(y^2-16)\lg(1-y)=0$.

19. а) $\log_4(2-y)\cdot\log_7(2y^2-9y+10)=0$,
б) $\log_8(3-y)\cdot\log_5(2y^2-13y+21)=0$.

20. а) $\log_{1-x}(x^2-5)=1$, б) $\log_{2-3z}(z^2-8)=1$.

21. а) $(x^2-9)\lg(-x)=0$, б) $(y^2-4)\lg(-y)=0$.

22. а) $(x+2)\ln(x+1)=0$, б) $(z+3)\lg(z-7)=0$.

23. а) $\log_5(x+1)^4=8$, б) $\log_4(z-2)^6=12$.

24. а) $\log_2(x^2-7)=\log_{4-x}(4-x)$, б) $\log_2(x^2-23)=\log_{6-x}(6-x)$.

25. а) $\log_{11}(y^2-35)=\log_{7-y}1$, б) $\log_{13}(y^2-3)=\log_{3-y}1$.

Тренировочная работа 7

Решите уравнение

1. $\log_{x^2} 13 = \log_{4-3x} 13.$

2. $(x+1)\log_{x+2}(x+3) = 0.$

3. $x^2 + \log_7 x + \log_7 \dfrac{7}{x} = 50.$

4. $\log_{15} x^4 = \log_{15}(15x)^2.$

5. $\log_5^2(5x-4) = \log_5(5x-4)^2.$

6. $\dfrac{(x-16)(x+19)}{\log_{12}(x+17)} = 0.$

7. $\log_7(x^2-12) = \log_7 x.$

8. $\log_5(x+1)^4 = 8.$

9. $\log_6(3-x)\cdot\log_7(2x^2-13x+21) = 0.$

10. $\log_{17}(x^2-24) = \log_{6-x} 1.$

11. $\dfrac{\log_{x+1}^2(x-1) + \log_5^2(2x-5)}{\log_{x+1}^2(x-1) + \log_5^2(x-2)} = 1.$

12. $\dfrac{\sqrt{4-x} - \sqrt{x^3-5x^2+4x}}{\sqrt{4-x} + \log_{5x+1}^2(x^3-5x^2+4x+1)} = 1.$

Часть II. Системы уравнений

Вначале напомним основные определения. Рассмотрим уравнения

$$f(x; y) = 0 \quad \text{и} \quad g(x; y) = 0. \tag{1}$$

Говорят, что дана система

$$\begin{cases} f(x; y) = 0, \\ g(x; y) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

двух алгебраических уравнений с двумя неизвестными x и y, если требуется найти все пары чисел $(x_0; y_0)$, каждая из которых является решением каждого из уравнений (1).

Пара чисел $(x_0; y_0)$ называется *решением системы уравнений* (2), если одновременно справедливы два числовых равенства $f(x_0; y_0) = 0$ и $g(x_0; y_0) = 0$. *Решить систему уравнений* (2) — *значит найти множество всех ее решений (если это множество является пустым, то говорят, что система не имеет решений).*

Системы трех и более уравнений с тремя и более неизвестными определяются совершенно аналогично.

Прежде чем переходить к примерам решения систем уравнений по каждой из шести функционально-числовых линий школьного курса, укажем некоторые основные равносильные преобразования систем уравнений:

• перенос слагаемого из одной части уравнения в другую;

• умножение обеих частей уравнения системы на одно и то же отличное от нуля число;

• почленное сложение двух уравнений системы с последующей заменой одного из них на уравнение, полученное в результате сложения.

Замечания.

1. Почленное умножение двух уравнений системы с последующей заменой одного из них на уравнение, полученное в результате умножения, может привести к приобретению посторонних решений. В этом случае следует сделать проверку найденных решений путем их подстановки в исходную систему.

2. Преобразования уравнений системы (в частности, приведение подобных) не должны изменять области допустимых значений переменных. Сужение области допустимых значений может привести к потере решений, расширение области допустимых значений — к приобретению посторонних решений.

§ 1. Системы целых алгебраических уравнений

Системы линейных уравнений, которым значительное внимание уделялось в основной школе, мы здесь рассматривать не будем. Основными методами решения систем, содержащих нелинейные уравнения, являются следующие:

- подстановка,
- замена переменной,
- алгебраическое сложение,
- разложение на множители.

Рассмотрим несколько примеров решения систем целых алгебраических уравнений, начав с разбора **задач 1 и 2 части II** вводной диагностической работы.

Пример 1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} xy+x+y=11, \\ x^2y+xy^2=30. \end{cases}$$

Решение. $\begin{cases} xy+x+y=11, \\ x^2y+xy^2=30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy+x+y=11, \\ xy(x+x)=30. \end{cases}$

Обозначим $xy=z$, $x+y=t$.

Система примет вид $\begin{cases} z+t=11, \\ tz=30 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t=5, \\ z=6, \end{cases} \\ \begin{cases} t=6, \\ z=5. \end{cases} \end{array}\right.$

Тогда $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=5, \\ xy=6. \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=6, \\ xy=5 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=3, \\ y=2, \end{cases} \\ \begin{cases} x=2, \\ x=3, \end{cases} \\ \begin{cases} x=5, \\ x=1, \end{cases} \\ \begin{cases} x=1, \\ x=5. \end{cases} \end{array}\right.$

Ответ: (3; 2), (2; 3), (5; 1), (1; 5).

Пример 2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=z, \\ x+y+z=-0{,}5. \end{cases}$$

Решение. Выразим из второго уравнения переменную z через переменные y и x и подставим полученное выражение в первое уравнение системы: $x^2+y^2=-y-x-0{,}5$, откуда $x^2+x+y^2+y+0{,}5=0$. Выделим полные квадраты в левой части последнего уравнения: $(x+0{,}5)^2+(y+0{,}5)^2=0$. Сумма двух квадратов равна нулю, только если каждый из них равен нулю. Значит, $x=-0{,}5$, $y=-0{,}5$. Поэтому $z=-0{,}5-x-y=0{,}5$.

Ответ: $(-0{,}5; -0{,}5; 0{,}5)$.

Одними из основных методов решения систем нелинейных уравнений являются метод подстановки и метод введения новых переменных (в пределах одного уравнения или всей системы), которые проиллюстрируем следующими примерами.

Пример 3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x^2+2y=-1,\\ x^4+x^2y-y^2=-5. \end{cases}$$

Решение. Из первого уравнения системы $y=-\dfrac{1+3x^2}{2}$, после подстановки второе уравнение примет вид

$$x^4+x^2\left(-\frac{1+3x^2}{2}\right)-\left(-\frac{1+3x^2}{2}\right)^2=-5 \iff$$

$$\iff 4x^4-2x^2(1+3x^2)-(1+3x^2)^2=-20 \iff -11x^4-8x^2+19=0$$

Обозначим $t=x^2$, $t\geqslant 0$.

Тогда $11t^2+8t-19=0 \iff \left[\begin{aligned} &t=1,\\ &t=-\frac{19}{11}. \end{aligned}\right.$

Поскольку $t\geqslant 0$, нам подходит $t=1$, то есть $x^2=1 \iff \left[\begin{aligned} &x=1,\\ &x=-1. \end{aligned}\right.$

Тогда $y=-\dfrac{1+3(\pm1)^2}{2}=-2$.

Ответ: $(1; -2)$, $(-1; -2)$.

Пример 4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x+xy^2+y^2)(x+y^2)^2=225,\\ (x-xy^2+y^2)(x+y^2)^2=25. \end{cases}$$

Решение. Пусть $x+y^2=z$, $xy^2=t$.

Система примет вид

$$\begin{cases}(z+t)z^2=225,\\(z-t)z^2=25\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{z+t}{z-t}=9,\\(z-t)z^2=25\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=\dfrac{4}{5}z,\\\dfrac{z}{5}\cdot z^2=25\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=5,\\t=4.\end{cases}$$

Выполним обратную замену:

$$\begin{cases}x+y^2=5,\\xy^2=4\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=1,\\y^2=4,\end{cases}\\\begin{cases}x=4,\\y^2=1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=1,\\y=2,\end{cases}\\\begin{cases}x=1,\\y=-2,\end{cases}\\\begin{cases}x=4,\\y=1,\end{cases}\\\begin{cases}x=4,\\y=-1.\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: (4; 1), (4; −1), (1; 2), (1; −2).

Среди систем нелинейных уравнений довольно часто встречаются системы, содержащие однородные уравнения, и системы, приводимые к первым.

Пример 5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}x^2-3xy+2y^2=0,\\x^2+y^2=20.\end{cases}$$

Решение. Разделим первое уравнение системы на y^2 (заметим, что при $y=0$ система не имеет решений):

$$\frac{x^2}{y^2}-\frac{3xy}{y^2}+2=0\Leftrightarrow\left(\frac{x}{y}\right)^2-3\frac{x}{y}+2=0.$$

Обозначим $\dfrac{x}{y}=t$. Тогда $t^2-3t+2=0\Leftrightarrow\begin{cases}t=1,\\t=2,\end{cases}$ то есть $\begin{cases}\dfrac{x}{y}=1,\\\dfrac{x}{y}=2.\end{cases}$

Следовательно, $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=y,\\x^2+y^2=20,\end{cases}\\\begin{cases}x=2y,\\x^2+y^2=20\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=y,\\2y^2=20,\end{cases}\\\begin{cases}x=2y,\\5y^2=20.\end{cases}\end{array}\right.$

Ответ: $(\sqrt{10};\sqrt{10})$, $(-\sqrt{10};-\sqrt{10})$, (4; 2), (−4; −2).

Пример 6. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 - 3xy + 3y^2 = 80, \\ x^2 + xy - 2y^2 = -56. \end{cases}$$

Решение. Заметим, что $80 = 8 \cdot 10$, $-56 = -7 \cdot 8$, умножим первое уравнение на 7, второе на 10 и сложим:

$$14x^2 - 21xy + 21y^2 + 10x^2 + 10xy - 20y^2 = 0 \Leftrightarrow 24x^2 - 11xy + y^2 = 0.$$

Разделим полученное уравнение на x^2 (заметим, что при $x = 0$ система не имеет решений):

$$24 - 11\frac{xy}{x^2} + \frac{y^2}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{y}{x}\right)^2 - 11\frac{y}{x} + 24 = 0.$$

Обозначим $\frac{y}{x} = t$.

Тогда $t^2 - 11t + 24 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 8, \\ t = 3, \end{array}\right.$ то есть $\left[\begin{array}{l} \frac{y}{x} = 8, \\ \frac{y}{x} = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 8x, \\ y = 3x. \end{array}\right.$

Получим

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 8x, \\ 2x^2 - 3xy + 3y^2 = 80, \end{cases} \\ \begin{cases} y = 3x, \\ 2x^2 - 3xy + 3y^2 = 80 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 8x, \\ x^2 = \frac{8}{17}, \end{cases} \\ \begin{cases} y = 3x, \\ x^2 = 4. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{17}}; \frac{16\sqrt{2}}{\sqrt{17}}\right)$; $\left(\frac{-2\sqrt{2}}{\sqrt{17}}; \frac{-16\sqrt{2}}{\sqrt{17}}\right)$; $(2; 6)$; $(-2; -6)$.

Среди систем нелинейных уравнений можно выделить системы симметрических уравнений. К ним относят системы вида

$$\begin{cases} f(x; y) = 0, \\ g(x; y) = 0, \end{cases}$$

где $f(x; y) = f(y; x)$, $g(x; y) = g(y; x)$ (такие многочлены называют симметрическими). Многочлены $u = x + y$ и $v = xy$ называются элементарными симметрическими многочленами. Решение систем симметрических уравнений основано на том, что любой симметрический многочлен можно выразить через элементарные. Например,

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = u^2 - 2v,$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = u^3 - 3uv.$$

Примером решения такой системы является пример 1 этого параграфа. В некоторых случаях решение систем симметрических уравнений удается получить без использования элементарных симметрических многочленов.

Пример 7. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} xy = 2, \\ x^3 + y^3 = 9. \end{cases}$$

Решение. $\begin{cases} xy=2, \\ x^3+y^3=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3y^3=8, \\ x^3+y^3=9. \end{cases}$

Пусть $x^3=a$, $y^3=b$. Получим систему $\begin{cases} ab=8, \\ a+b=9 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 8, \\ b = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} a = 1, \\ b = 8. \end{cases} \end{array}\right. \quad \text{Тогда} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^3 = 8, \\ y^3 = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x^3 = 1, \\ y^3 = 8 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2, \\ y = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1, \\ y = 2. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: (1; 2), (2; 1).

Решение систем уравнений, содержащих модуль, обычно сводится к рассмотрению нескольких случаев, в каждом из которых приходится решать систему уравнений, уже не содержащих знаков абсолютной величины.

Пример 8. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} |x-1| + y = 0, \\ 2x - y = 1. \end{cases}$$

Решение. $\begin{cases} |x-1|+y=0, \\ 2x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-1 \geqslant 0, \\ x-1+y = 0, \\ 2x-y = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x-1 < 0, \\ -x+1+y = 0, \\ 2x-y = 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 1, \\ 3x = 2, \\ y = 2x-1, \end{cases} \\ \begin{cases} x-1 < 0, \\ y-x = -1, \\ 2x-y = 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = -1. \end{cases}$$

Ответ: (0; −1).

Системы целых алгебраических уравнений

Решите систему уравнений

1. а) $\begin{cases} \frac{x}{2}+\frac{y}{3}=5, \\ \frac{x}{3}+\frac{y}{2}=5. \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{x}{7}-\frac{y}{3}=10, \\ \frac{x}{3}-\frac{y}{7}=10. \end{cases}$

2. а) $\begin{cases} \frac{x}{4}-\frac{y}{5}=4, \\ \frac{x}{8}+\frac{y}{10}=2. \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{x}{9}-\frac{y}{2}=6, \\ \frac{x}{18}+\frac{y}{4}=3. \end{cases}$

3. а) $\begin{cases} 3x^2+y=4, \\ 2x^2-y=1. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x^2-3y=1, \\ 2x^2+3y=5. \end{cases}$

4. а) $\begin{cases} (x+6y)^2=7y, \\ (x+6y)^2=7x. \end{cases}$ б) $\begin{cases} (3x-8y)^2=-5x, \\ (3x-8y)^2=-5y. \end{cases}$

5. а) $\begin{cases} 5x-4y=9, \\ (5x-4y)^2=x^2+80. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 8x+9y=6, \\ (8x+9y)^2=x^2+27. \end{cases}$

6. а) $\begin{cases} 2x+3y=7, \\ 2x^2+y=9. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x+5y=-8, \\ 3x^2+y=2. \end{cases}$

7. а) $\begin{cases} 2x=5y^2, \\ 5x=2y^2. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x=5y^2, \\ 5x=3y^2. \end{cases}$

8. а) $\begin{cases} (2x+3)^2=7y, \\ (3x+2)^2=7y. \end{cases}$ б) $\begin{cases} (7x-2y)^2=25y, \\ (2x-7y)^2=25y. \end{cases}$

9. а) $\begin{cases} 3x^2-2x=y, \\ 3x-2=y. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 6x^2+5x=11y, \\ 6x+5=11y. \end{cases}$

10. а) $\begin{cases} (x-3y)(x-y)=0, \\ y^2+3y+1=x. \end{cases}$ б) $\begin{cases} (x+2y)(x-3y)=0, \\ y^2-4y+25=2x. \end{cases}$

11. а) $\begin{cases} x^2=4y+1, \\ x^2+3=4y+y^2. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2=2y-7, \\ x^2+23=2y+y^2. \end{cases}$

12. а) $\begin{cases} (x-2)(y+3)=0, \\ (x^2-4)(y+4)=3x. \end{cases}$ б) $\begin{cases} (x-3)(y-7)=0, \\ (x^2-9)(y-4)=24x. \end{cases}$

13. а) $\begin{cases} x^2=36y^2, \\ \frac{x}{6}=y+7. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2=9y^2, \\ \frac{x}{3}=y+2. \end{cases}$

14. а) $\begin{cases} x^2=3y-2, \\ y^2=3x-2. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2=5y-6, \\ y^2=5x-6. \end{cases}$

15. а) $\begin{cases} 5xy=4x^2+y^2, \\ xy=1. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 50xy=x^2+49y^2, \\ xy=1. \end{cases}$

16. а) $\begin{cases} x^9y^8=x^8y^9, \\ xy=36. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^{11}y^{10}=x^{10}y^{11}, \\ xy=64. \end{cases}$

17. а) $\begin{cases} x(2x-3y)=4, \\ 4x^2=9y^2. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x(7x-2y)=14, \\ 49x^2=4y^2. \end{cases}$

18. а) $\begin{cases} x^2+y^2=36, \\ xy=6. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+y^2=5, \\ xy=-2. \end{cases}$

19. а) $\begin{cases} x+y=10, \\ xy=24. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y=2, \\ xy=-24. \end{cases}$

20. а) $\begin{cases} (x-2y)(x+3)=0, \\ y^2-xy-3y+4=0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} (x-5y)(x-3)=0, \\ 4y^2-xy+3y+4=0. \end{cases}$

21. а) $\begin{cases} |x+3y|=2y+3, \\ |2y+3|=5. \end{cases}$ б) $\begin{cases} |x+y|=2y+1, \\ |2y+1|=3. \end{cases}$

22. а) $\begin{cases} 2x^2+3y^2=11, \\ 4x^2+6y^2=11x. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x^2+5y^2=23, \\ 6x^2+15y^2=23x. \end{cases}$

23. а) $\begin{cases} |2y^2+3x^2+4|=2y^2+3x^2+x, \\ xy=8. \end{cases}$

б) $\begin{cases} |3y^2+4x^2+4|=3y^2+4x^2+y, \\ xy=-8. \end{cases}$

24. а) $\begin{cases} |x-2y|=5, \\ y(x-2y-5)=20. \end{cases}$ б) $\begin{cases} |x-5y|=9, \\ y(x-5y-9)=-90. \end{cases}$

25. а) $\begin{cases} x+2y=5, \\ x^2-4y^2=35. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+7y=1, \\ x^2-49y^2=5. \end{cases}$

Тренировочная работа 8

Решите систему уравнений.

1. $\begin{cases} 3x+5y=1, \\ 2x-3y=7. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x-2y+2z=3, \\ 3x+y+z=1, \\ -2x+3y-3z=-4. \end{cases}$

3. $\begin{cases} (x-3)(x+2y)=0, \\ y^2+x=0. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x+y=1, \\ xy=-6. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x+y+xy=0, \\ x^3+y^3+x^3y^3=12. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x^2-y^2=3, \\ x^2+xy+y^2=7. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x+y+xy=5, \\ x^2+y^2+xy=7. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x^2-2xy=3, \\ 3x^2-2y^2=1. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=8, \\ x^2y+y^2x=6. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x^2+y=2, \\ x+y^2=2. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x+y=2, \\ |3x-y|=1. \end{cases}$

12. $\begin{cases} |x|+2|y|=3, \\ 7x+5y=2. \end{cases}$

§ 2. Системы, содержащие дробно-рациональные уравнения

Общие методы решения систем, содержащих дробно-рациональные уравнения, остаются теми же, что и для систем целых уравнений: метод алгебраического сложения, подстановка, замена переменной в пределах одного или нескольких уравнений системы, разложение на множители и т. п. Основное отличие — наличие ограничений, которым должны удовлетворять решения системы (эти ограничения, как правило, связано с условием неравенства нулю знаменателей одной или нескольких алгебраических дробей). Рассмотрим примеры, начав с решения **задач 3 и 4 части II** вводной диагностической работы.

Пример 1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{5}{6}, \\ x^2 - y^2 = 5. \end{cases}$$

Решение. Рассмотрим только первое уравнение системы и обозначим $\frac{x}{y} = t$, тогда $\frac{y}{x} = \frac{1}{t}$, $t \neq 0$.

Имеем $t - \frac{1}{t} = \frac{5}{6} \Leftrightarrow 6t^2 - 5t - 6 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{aligned} t &= \frac{3}{2}, \\ t &= -\frac{2}{3}, \end{aligned} \right. \quad \text{то есть} \quad \left[\begin{aligned} \frac{x}{y} &= \frac{3}{2}, \\ \frac{x}{y} &= -\frac{2}{3}. \end{aligned} \right.$$

Получаем две системы уравнений $\begin{cases} x = \frac{3}{2}y, \\ x^2 - y^2 = 5 \end{cases}$ или $\begin{cases} x = -\frac{3}{2}y, \\ x^2 - y^2 = 5, \end{cases}$ т. е. $\begin{cases} x = \frac{3}{2}y, \\ \frac{9}{4}y^2 - y^2 = 5 \end{cases}$ или $\begin{cases} x = -\frac{2}{3}y, \\ \frac{4}{9}y^2 - y^2 = 5. \end{cases}$ Вторая система не имеет решений, решения первой системы дают ответ.

Ответ: $(3, 2)$, $(-3, -2)$.

Пример 2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x^2 + 2y^2}{y} = 3, \\ \left(\dfrac{x^2 + 2y^2}{y}\right)^2 = 9x. \end{cases}$$

Решение. Пусть $\frac{x^2+2y^2}{y}=z$. Получаем

$$\begin{cases} z = 3, \\ z^2 = 9x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 3, \\ x = 1. \end{cases}$$

Вернемся к прежним переменным:

$$\begin{cases} x = 1, \\ \dfrac{x^2+2y^2}{y} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ 2y^2 - 3y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1, \\ y = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1, \\ y = \frac{1}{2}. \end{cases} \end{array} \right.$$

Ответ: $(1; 1)$; $\left(1; \frac{1}{2}\right)$.

Пример 3. Решите систему

$$\begin{cases} 2xy - 3\frac{x}{y} = 15, \\ xy + \frac{x}{y} = 15. \end{cases}$$

Решение. Обозначим $a = xy$, $b = \frac{x}{y}$. Тогда система примет вид

$$\begin{cases} 2a - 3b = 15, \\ a + b = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 12, \\ b = 3, \end{cases}$$

$$\text{или} \quad \begin{cases} xy = 12, \\ \frac{x}{y} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y, \\ y \cdot 3y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y, \\ y^2 = 4. \end{cases}$$

Ответ: $(6; 2)$, $(-6; -2)$.

Пример 4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + 2y + \dfrac{3}{3x+2y} = 4, \\ \dfrac{y}{3x+2y-3} = 5. \end{cases}$$

Решение. Пусть $3x + 2y = t$, $t \neq 0$. Тогда первое уравнение системы примет вид $t + \frac{3}{t} = 4$. Умножив обе части полученного уравнения на t и решив полученное квадратное уравнение, найдем, что $t = 1$ либо $t = 3$. В последнем случае знаменатель дроби в левой части второго уравнения системы обращается в нуль, поэтому остается только значение $t=1$, т. е. $3x+2y=1$. Подставим это значение во второе уравнение системы: $\frac{y}{1-3}=5$, откуда $y=-10$. Тогда $3x-2\cdot 10=1$ и $x=7$.

Ответ: $(7; -10)$.

Пример 5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y = \dfrac{x}{1-\dfrac{6}{x+6}}, \\ x(x^2-y-36)=0. \end{cases}$$

Решение. Преобразуем правую часть первого уравнения системы:

$$\frac{x}{1-\dfrac{6}{x+6}} = \frac{x}{\dfrac{x-6+6}{x+6}} = \frac{x}{\dfrac{x}{x+6}}.$$

Поскольку знаменатель любой из дробей отличен от нуля, получаем, что $x \neq 0$, $x \neq -6$. В этом случае

$$\frac{x}{\dfrac{x}{x+6}} = x+6,$$

и первое уравнение системы принимает вид $y=x+6$. Поскольку $x \neq 0$, из второго уравнения системы получим $x^2-y-36=0$. Подставив в это уравнение $y=x+6$, приходим к уравнению $x^2-x-42=0$, корнями которого являются $x=-6$ (этот корень не удовлетворяет условию $x \neq -6$) и $x=7$ (в этом случае $y=7+6=13$).

Ответ: $(7; 13)$.

Системы, содержащие дробно-рациональные уравнения

Решите систему уравнений

1. а) $\begin{cases} \dfrac{x}{2y+3}=3, \\ \dfrac{y}{2y+3}=-\dfrac{1}{9}. \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{x}{4y+1}=-2, \\ \dfrac{y}{4y+1}=-\dfrac{1}{3}. \end{cases}$

2. а) $\begin{cases} \dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{y}=2, \\ \dfrac{5}{x}+\dfrac{3}{y}=2. \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{7}{x}+\dfrac{8}{y}=5, \\ \dfrac{8}{x}+\dfrac{7}{y}=5. \end{cases}$

3. а) $\begin{cases} \dfrac{12}{x}+\dfrac{25}{y}=7, \\ \dfrac{6}{x}+\dfrac{5}{y}=2. \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{14}{x}-\dfrac{15}{y}=12, \\ \dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{y}=2. \end{cases}$

4. а) $\begin{cases} \dfrac{5x}{8y}=\dfrac{8y}{5x}, \\ 5x-8y=20. \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{7x}{2y}=\dfrac{2y}{7x}, \\ 7x-2y=-14. \end{cases}$

5. а) $\begin{cases} 2x+\dfrac{7}{y}=11, \\ 7x+\dfrac{2}{y}=16. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 8x+\dfrac{3}{y}=-13, \\ 3x+\dfrac{8}{y}=2. \end{cases}$

6. а) $\begin{cases} \dfrac{(x-9)(x-6)}{y+8}=0, \\ \dfrac{(y+8)(y-8)}{x-6}=0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{(x-8)(x-4)}{y-5}=0, \\ \dfrac{(y-5)(y+8)}{x-4}=0. \end{cases}$

7. а) $\begin{cases} 4x=\dfrac{25}{y}+15, \\ 4y=\dfrac{25}{x}+15. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x=-\dfrac{6}{y}-17, \\ 5y=-\dfrac{6}{x}-17. \end{cases}$

8. а) $\begin{cases} \dfrac{x}{4x-7}=-\dfrac{y}{4x-7}, \\ 4x^2+19y+21=0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{x}{3x-8}=-\dfrac{y}{3x-8}, \\ 3x^2+5y-8=0. \end{cases}$

9. а) $\begin{cases} \dfrac{x}{5x-4y}=\dfrac{y}{5y-4x}, \\ xy=-16. \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{x}{3x+4y}=\dfrac{y}{3y+4x}, \\ xy=-9. \end{cases}$

10. а) $\begin{cases} \dfrac{x+3}{4y}=1, \\ \dfrac{x+3y}{4x}=y. \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{x+7}{8y}=1, \\ \dfrac{x+7y}{8x}=y. \end{cases}$

11. а) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{y+2}=3, \\ x^2=3y+7. \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{2x+5}{y+1}=5, \\ x^2=5y+8. \end{cases}$

12. а) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{y-1}=\dfrac{x-2}{y-2}, \\ y^2=3-2x. \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{x-5}{y-5}=\dfrac{x+4}{y+4}, \\ y^2=5+4x. \end{cases}$

13. а) $\begin{cases} (x+1)(x-8)=0, \\ \dfrac{y-3}{x+y-2}=5. \end{cases}$ б) $\begin{cases} (y+7)(y-2)=0, \\ \dfrac{x+12}{x+y+10}=5. \end{cases}$

14. а) $\begin{cases} \dfrac{1}{x^2}=\dfrac{4}{y^2}, \\ xy=-8. \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{1}{x^2}=\dfrac{9}{y^2}, \\ xy=75. \end{cases}$

15. а) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y^5}=5\dfrac{x^2}{y^4}, \\ x-5y=15. \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{x^3}{y^3}=-5\cdot\dfrac{x^3}{y^2}, \\ x+5y=25. \end{cases}$

16. а) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}-6\cdot\dfrac{y}{x}=-5, \\ x-y=-14. \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+5\cdot\dfrac{y}{x}=6, \\ x-y=4. \end{cases}$

17. а) $\begin{cases} x+2y+\dfrac{15}{x+2y}=8, \\ \dfrac{y}{x+2y-5}=1. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-y-\dfrac{4}{x-y}=3, \\ \dfrac{y}{x-y-4}=-2. \end{cases}$

18. а) $\begin{cases} \dfrac{x}{y^2}=5, \\ \dfrac{x+y^4}{y^2}=3y+5. \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{x}{y^3}=3, \\ \dfrac{x+y^5}{y^3}=-2y+3. \end{cases}$

19. а) $\begin{cases} \dfrac{x-4y-8}{x}=4, \\ |x-4y|=8. \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{x+2y-4}{x}=-2, \\ |x+2y|=4. \end{cases}$

20. а) $\begin{cases} x^2+5x+4=0, \\ \dfrac{x+y+6}{y+2}=4. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+4x+3=0, \\ \dfrac{x+y-4}{y-5}=3. \end{cases}$

21. а) $\begin{cases} \dfrac{(y+8)(y+3)}{x-2}=0, \\ x^2+y=1. \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{(y-7)(y+4)}{x+6}=0, \\ x^2+y=32. \end{cases}$

22. а) $\begin{cases} 3\cdot\dfrac{x}{y}-2\cdot\dfrac{y}{x}=5, \\ 6\cdot\dfrac{x}{y}-4\cdot\dfrac{y}{x}=5x. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5\cdot\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}=4, \\ 5\cdot\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}=4x. \end{cases}$

23. а) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=1, \\ xy=-\dfrac{1}{6}. \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=7, \\ xy=\dfrac{1}{12}. \end{cases}$

24. а) $\begin{cases} x+\dfrac{4}{y}=3, \\ \dfrac{x}{y}=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+\dfrac{3}{y}=-1, \\ \dfrac{x}{y}=-\dfrac{2}{3}. \end{cases}$

25. а) $\begin{cases} \dfrac{x^2+12xy}{2xy-3y^2}=3, \\ x-3y=-12. \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{x^2-10xy}{3xy+2y^2}=-2, \\ x+2y=-12. \end{cases}$

Тренировочная работа 9

Решите систему уравнений.

1. $\begin{cases} \dfrac{(x-5)(x+6)}{y+5}=0, \\ \dfrac{(y+5)(y-6)}{x+6}=0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dfrac{x}{3x-2}=\dfrac{y}{3y-2}, \\ 3y^2-5x+2=0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} (x-6)(y-7)=0, \\ \dfrac{y-4}{x+y-10}=3. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+2\dfrac{y}{x}=3, \\ x-y=7. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x-2y+\dfrac{3}{x-2y}=4, \\ \dfrac{y}{x-2y-3}=5. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dfrac{x-3y-5}{x}=5, \\ |x-3y|=5. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x^2-3x+2=0, \\ \dfrac{x+y-3}{y-2}=3. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dfrac{(y-6)(y+3)}{x-5}=0, \\ x^2+y=22. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2\dfrac{x}{y}+3\dfrac{y}{x}=7, \\ 6\dfrac{x}{y}+9\dfrac{y}{x}=7x. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{y-2}=0, \\ \dfrac{y^2+8}{y}=3x. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dfrac{y^2}{x}=5y, \\ \dfrac{24x^2-7x}{y^2}=1. \end{cases}$

12. $\begin{cases} y=\dfrac{x}{1+\frac{5}{x-5}}, \\ x(x^2+y-25)=0. \end{cases}$

§ 3. Системы, содержащие иррациональные уравнения

При решении *систем иррациональных уравнений* используются те же методы, что и при решении иррациональных уравнений: избавление от иррациональности посредством возведения в квадрат или замены переменной. Замена переменной применяется как в пределах всей системы, так и в пределах одного из уравнений системы. Особое внимание следует уделить отбору решений, связанному с неотрицательностью выражений под знаком корня четной степени. Рассмотрим несколько примеров, начав с решения **заданий 5 и 6 части II** вводной диагностической работы.

Пример 1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=7, \\ \sqrt{xy}=10. \end{cases}$$

Решение. Пусть $\sqrt{x}=u$, $\sqrt{y}=v$. Получаем систему

$$\begin{cases} u+v=7, \\ uv=10, \\ u\geqslant 0, \\ v\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u=2, \\ v=5, \end{cases} \\ \begin{cases} u=5, \\ v=2. \end{cases} \end{array}\right.$$

Значит, $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{x}=2, \\ \sqrt{y}=5, \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{x}=5, \\ \sqrt{y}=2. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=4, \\ y=25, \end{cases} \\ \begin{cases} x=25, \\ y=4. \end{cases} \end{array}\right.$

Ответ: (4; 25), (25; 4).

Пример 2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{2x+y+2}=7, \\ 3x+2y=23. \end{cases}$$

Решение. Обозначим $\sqrt{x+y}=t$, $t\geqslant 0$; $\sqrt{2x+y+2}=z$, $z\geqslant 0$. Тогда $x+y=t^2$; $2x+y+2=z^2$. Следовательно, $t^2+z^2=3x+2y+2$.

Система примет вид

$$\begin{cases} t+z=7, \\ t^2+z^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=7-z, \\ (7-z)^2+z^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=7-z, \\ z^2-7z+12=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} z=4, \\ t=3, \end{cases} \\ \begin{cases} z=3, \\ t=4. \end{cases} \end{array} \right.$$

Следовательно, $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{2x+y+2}=4, \\ \sqrt{x+y}=3, \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{2x+y+2}=3, \\ \sqrt{x+y}=4 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x+y+2=16, \\ x+y=9, \end{cases} \\ \begin{cases} 2x+y+2=9, \\ x+y=16. \end{cases} \end{array} \right.$

Ответ: (5; 4), (−9; 25).

Пример 3. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{5}{2}, \\ x+y=10. \end{cases}$

Решение. Пусть $u=\sqrt{\dfrac{x}{y}}$. Тогда $\begin{cases} u+\dfrac{1}{u}=\dfrac{5}{2}, \\ u>0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=\dfrac{1}{2}, \\ u=2. \end{array} \right.$ Сделаем обратную замену:

1) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}}=\dfrac{1}{2}, \\ x+y=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2, \\ y=8; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}}=2, \\ x+y=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=8, \\ y=2. \end{cases}$

Ответ: (2; 8), (8; 2).

Пример 4. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sqrt[3]{x}\sqrt{y}+\sqrt{x}\sqrt[3]{y}=12, \\ xy=64. \end{cases}$

Решение. Упростим вначале первое уравнение системы с учетом второго:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x}\sqrt{y}+\sqrt{x}\sqrt[3]{y}=12, \\ xy=64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[6]{x^2y^3}+\sqrt[6]{x^3y^2}=12, \\ xy=64 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[6]{64^2y}+\sqrt[6]{64^2x}=12, \\ xy=64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[6]{y}+\sqrt[6]{x}=3, \\ xy=64. \end{cases}$$

Обозначим $\sqrt[6]{x}=a$, $\sqrt[6]{y}=b$, $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$. Имеем

$$\begin{cases} a+b=3, \\ a^6b^6=64, \\ a\geqslant 0, \\ b\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=3, \\ ab=2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=1, \\ b=2, \end{cases} \\ \begin{cases} a=2, \\ b=1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Вернемся к прежним переменным: $\begin{cases} \sqrt[6]{x}=1, \\ \sqrt[6]{y}=2 \end{cases}$ или $\begin{cases} \sqrt[6]{x}=2, \\ \sqrt[6]{y}=1. \end{cases}$

Ответ: $(1;64)$, $(64;1)$.

Пример 5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{20\dfrac{y}{x}}=\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}, \\ \sqrt{\dfrac{16x}{5y}}=\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}. \end{cases}$$

Решение. Область определения системы:

$$\begin{cases} x+y\geqslant 0, \\ x-y\geqslant 0, \\ \dfrac{x}{y}>0 \end{cases} \Leftrightarrow x\geqslant y>0.$$

Перемножим уравнения: $\sqrt{20\dfrac{y}{x}}\cdot\sqrt{\dfrac{16x}{5y}}=(\sqrt{x+y})^2-(\sqrt{x-y})^2$, или $8=x+y-x+y$, то есть $y=4$.

Из второго уравнения системы получаем

$$\frac{4}{5}x=x+4-2\sqrt{x+4}\cdot\sqrt{x-4}+x-4 \Leftrightarrow 2x-\frac{4}{5}x=2\sqrt{x^2-16},$$

откуда $\left(\dfrac{3}{5}x\right)^2=x^2-16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5, \\ x=-5; \end{array}\right.$ $x=-5$ — посторонний корень.

Ответ: $(5;4)$.

Системы, содержащие иррациональные уравнения

Решите систему уравнений.

1. а) $\begin{cases} 2\sqrt{x}=3y, \\ y^2+2\sqrt{x}=4. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5\sqrt{x}=4y, \\ y^2+5\sqrt{x}=5. \end{cases}$

2. а) $\begin{cases} x-4\sqrt{y}=1, \\ x+2y=17. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+2\sqrt{y}=-2, \\ x+2y=2. \end{cases}$

3. а) $\begin{cases} (\sqrt{x}-5)(\sqrt{y}-3)=0, \\ 3x+5y=60. \end{cases}$ б) $\begin{cases} (\sqrt{x}-2)(\sqrt{y}-3)=0, \\ 3x+2y=15 \end{cases}$

4. а) $\begin{cases} 5x-3\sqrt{y}=-34, \\ 5x+3\sqrt{y}=-16. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 6x-5\sqrt{y}=-37, \\ 6x+5\sqrt{y}=13. \end{cases}$

5. а) $\begin{cases} 3x=-7y, \\ \sqrt{-21xy}=x+28. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x=5y, \\ \sqrt{10xy}=x+15. \end{cases}$

6. а) $\begin{cases} 5\sqrt{x}+2y=31, \\ 5\sqrt{x}+2y^2=43. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 7\sqrt{x}-2y=34, \\ 7\sqrt{x}-2y^2=10. \end{cases}$

7. а) $\begin{cases} \sqrt{xy}=6, \\ 4\sqrt{\dfrac{x}{y}}=6. \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sqrt{xy}=15, \\ 25\sqrt{\dfrac{x}{y}}=15. \end{cases}$

8. а) $\begin{cases} x\sqrt{y}=-18, \\ xy=-108. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x\sqrt{y}=30, \\ xy=150. \end{cases}$

9. а) $\begin{cases} x\sqrt{y}=-6, \\ \dfrac{3x}{\sqrt{y}}=-2. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x\sqrt{y}=-42, \\ \dfrac{7x}{\sqrt{y}}=-6. \end{cases}$

10. а) $\begin{cases} \sqrt{xy}=9, \\ 3x-y=-18. \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sqrt{xy}=4, \\ 2x-5y=12. \end{cases}$

11. а) $\begin{cases} (x-7)\sqrt{y-2}=0, \\ y^2+3x-25=0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} (x-9)\sqrt{y-4}=0, \\ y^2+3x-43=0. \end{cases}$

12. а) $\begin{cases} (x-4)\sqrt{x-5}\sqrt{y-5}=0, \\ y=x-1. \end{cases}$ б) $\begin{cases} (x+3)\sqrt{x+2}\sqrt{y+1}=0, \\ y=x-4. \end{cases}$

13. а) $\begin{cases} (x-3)(y-11)=0, \\ (x+y-10)\sqrt{y-9}=0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} (x-4)(y-10)=0, \\ (x+y-8)\sqrt{y-7}=0. \end{cases}$

14. а) $\begin{cases} y=\sqrt{2x-5}, \\ (y+3)(x-4)=0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} y=\sqrt{2x+5}, \\ (y+7)(x-4)=0. \end{cases}$

15. а) $\begin{cases} \sqrt{2x+5}=\sqrt{2y-3}, \\ y^2+2x=0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sqrt{4x-9}=\sqrt{4y-1}, \\ y^2-3x=-2. \end{cases}$

16. а) $\begin{cases} (x-1)\sqrt{y-6}=0, \\ (y-2)\sqrt{x-3}=0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} (x+4)\sqrt{y-5}=0, \\ (y-3)\sqrt{x+3}=0. \end{cases}$

17. а) $\begin{cases} \sqrt{5-x}=y-4, \\ (x^2-16)\sqrt{y-3}=0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sqrt{10-x}=y+1, \\ (x^2-36)\sqrt{y+2}=0. \end{cases}$

18. а) $\begin{cases} 3x+2\sqrt{y}=18, \\ 3\sqrt{x}+2\sqrt{y}=12. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x+5\sqrt{y}=23, \\ 14\sqrt{x}+5\sqrt{y}=47. \end{cases}$

19. а) $\begin{cases} x\sqrt{\dfrac{y-3}{x}}=-10, \\ y^2=49. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x\sqrt{\dfrac{y-2}{x}}=-7, \\ y^2=25. \end{cases}$

20. а) $\begin{cases} 2\sqrt{x}-3\sqrt{y}=1, \\ 3\sqrt{x}-\sqrt{y}=5. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3\sqrt{x}-5\sqrt{y}=-9, \\ 5\sqrt{x}-\sqrt{y}=7. \end{cases}$

21. а) $\begin{cases} x+2\sqrt{xy}=0, \\ (x+3y)(x-4y)=0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+9\sqrt{xy}=0, \\ \sqrt{x+8y}-6x^3+7y=0. \end{cases}$

22. а) $\begin{cases} \sqrt{2x-3y}=\sqrt{3x+2y}, \\ y^2+5y+x=16. \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sqrt{4x-3y}=\sqrt{3x+4y}, \\ y^2+7y-x=4. \end{cases}$

23. а) $\begin{cases} \sqrt{3x-2y}=y, \\ x^2+2y+y^2=4. \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sqrt{6x-5y}=y, \\ x^2+5y+y^2=7. \end{cases}$

24. а) $\begin{cases} x^2+\sqrt{xy}-2x-12=0, \\ \sqrt{y}=\dfrac{9}{\sqrt{x}}. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2-3\sqrt{xy}+4x+6=0, \\ \sqrt{y}=\dfrac{6}{\sqrt{x}}. \end{cases}$

25. а) $\begin{cases} x+7\sqrt{xy}=8, \\ y+7\sqrt{xy}=8. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x-\sqrt{xy}=2, \\ 3y-\sqrt{xy}=2. \end{cases}$

Тренировочная работа 10

Решите систему уравнений.

1. $\begin{cases} x^2 - x - 2 = 0, \\ 3\sqrt{2x} - y = 0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x^2 - 4x - 5 = 0, \\ y\sqrt{-2x} = 0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x - 3\sqrt{y} = 4, \\ 2x + 3\sqrt{y} = 16. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3\sqrt{x} + 2y = 13, \\ 3\sqrt{x} + 2y^2 = 17. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x = 3y, \\ \sqrt{6xy} = x + 9. \end{cases}$

6. $\begin{cases} (x-2)\sqrt{y-3} = 0, \\ y^2 - 2x - 5 = 0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \sqrt{xy} = 6, \\ 2x - 5y = 2. \end{cases}$

8. $\begin{cases} (2y-3)(x^2 - 2x + 3) = 0, \\ \sqrt{x-2} - 2y = -2. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \sqrt{3x-5} = \sqrt{3y+7}, \\ y^2 + x = 10. \end{cases}$

10. $\begin{cases} (x-3)\sqrt{x-4}\sqrt{y-2} = 0, \\ y = x - 3. \end{cases}$

11. $\begin{cases} (y^2 - y - 2)\sqrt{x-3} = 0, \\ (2x^2 - 7x + 5)\sqrt{2y-3} = 0. \end{cases}$

12. $\begin{cases} (3x-5)\sqrt{y^2 - 3x - 4} = 0, \\ y - 3 = \sqrt{6-5x}. \end{cases}$

§ 4. Системы, содержащие тригонометрические уравнения

Основные методы решения систем, содержащих тригонометрические уравнения, всё те же: метод алгебраического сложения, замена переменной в пределах одного уравнения или всей системы, подстановка. Отбор решений в таких системах связан либо с ограниченностью синуса и косинуса, либо с наличием корней четной степени или алгебраических дробей. Посмотрим на конкретных примерах, как применяются эти методы, начав с разбора **заданий 7 и 8 части II** вводной диагностической работы.

Пример 1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{y+\cos^2 x-2}+\cos x=0, \\ y\sin^2 x-\sin x-1=0. \end{cases}$$

Решение. Вначале рассмотрим первое уравнение системы:

$$\sqrt{y+\cos^2 x-2}+\cos x=0 \Leftrightarrow \sqrt{y+\cos^2 x-2}=-\cos x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y+\cos^2 x-2=\cos^2 x, \\ \cos x\leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2, \\ \cos x\leqslant 0. \end{cases}$$

При $y=2$ второе уравнение системы примет вид $2\sin^2 x-\sin x-1=0$, откуда $\sin x=1$ и $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$ (для всех таких значений переменной неравенство $\cos x\leqslant 0$ выполнено), либо $\sin x=-0{,}5$. С учетом неравенства $\cos x\leqslant 0$ из уравнения $\sin x=-0{,}5$ получаем $x=-\frac{5\pi}{6}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

Ответ: $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n; 2\right)$, $n\in\mathbb{Z}$; $\left(-\frac{5\pi}{6}+2\pi k; 2\right)$, $k\in\mathbb{Z}$.

Пример 2. Решите систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{2\sin^2 x+3\sin x+1}{\sqrt{-y}}=0, \\ y+4\sqrt{3}\cos x=0. \end{cases}$

Решение. Из первого уравнения системы следует, что $y<0$. Тогда из второго уравнения получаем, что $\cos x>0$. Числитель дроби в левой части первого уравнения обращается в нуль, если $\sin x=-0{,}5$ либо $\sin x=-1$ (эти значения переменной не удовлетворяют неравенству $\cos x>0$). С учетом условий $\sin x=-0{,}5$ и $\cos x>0$ получаем, что

$x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. В этом случае $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и второе уравнение системы принимает вид $y + 4\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$, откуда $y = -6$.

Ответ: $\left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; -6\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Пример 3. Решите систему уравнений $\begin{cases} \cos x = y + 1, \\ \sin x = \sqrt{3y^2 + 2y}. \end{cases}$

Решение. Система равносильна следующей:

$$\begin{cases} \cos x = y + 1, \\ \sin x = \sqrt{3y^2 + 2y}, \\ \cos^2 x + \sin^2 x = (y+1)^2 + 3y^2 + 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = y + 1, \\ \sin x = \sqrt{3y^2 + 2y}, \\ y^2 + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 0, \\ \cos x = 1, \\ \sin x = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} y = -1, \\ \cos x = 0, \\ \sin x = 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 0, \\ x = 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}, \end{cases} \\ \begin{cases} y = -1, \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(2\pi n; 0)$; $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; -1\right)$, $n, k \in \mathbb{Z}$.

Пример 4. Решите систему уравнений $\begin{cases} y - x = \frac{1}{4}, \\ \cos(\pi x)\cdot\cos(\pi y) = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$

Решение. Система равносильна следующей:

$$\begin{cases} y = x + \frac{1}{4}, \\ \cos(\pi x)\cdot\cos(\pi y) = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

Подставим $y = x + \frac{1}{4}$ во второе уравнение системы и решим его:

$$\frac{1}{2}\left(\cos\left(2\pi x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos\left(2\pi x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\pi x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}, \\ 2\pi x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = n, \ n \in \mathbb{Z}, \\ x = -\frac{1}{4} + k, \ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Вспомним, что $y = x + \frac{1}{4}$. Тогда

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = n, \\ y = n + \frac{1}{4}, \ n \in \mathbb{Z}, \end{cases} \\ \begin{cases} x = k - \frac{1}{4}, \\ y = k, \ k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(n; n + \frac{1}{4}\right)$; $\left(k - \frac{1}{4}; k\right)$, $n, k \in \mathbb{Z}$.

Пример 5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x + \cos y = 0, \\ \sin^2 y + \cos^2 x = 1{,}5. \end{cases}$$

Решение. Система равносильна следующей:

$$\begin{cases} \sin x + \cos y = 0, \\ 1 - \cos^2 y + 1 - \sin^2 x = 1{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \cos y = 0, \\ \sin^2 x + \cos^2 y = 0{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos y = -\sin x, \\ \left[\begin{array}{l} \sin x = \frac{1}{2}, \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2}, \\ \cos y = -\frac{1}{2}, \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x = -\frac{1}{2}, \\ \cos y = \frac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \ n \in \mathbb{Z}, \\ y = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}, \end{cases} \\ \begin{cases} x = (-1)^{m+1} \frac{\pi}{6} + \pi m, \ m \in \mathbb{Z}, \\ y = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi l, \ l \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $\left((-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n; \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right)$, $n, k \in \mathbb{Z}$; $\left((-1)^{m+1} \frac{\pi}{6} + \pi m; \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi l\right)$, $m, l \in \mathbb{Z}$.

Пример 6. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x \cdot \sin y = \frac{1}{4}, \\ \cos x \cdot \cos y = \frac{3}{4}. \end{cases}$$

Решение. Заменим первое уравнение суммой, а второе — разностью уравнений системы:

$$\begin{cases} \cos x\cos y+\sin x\sin y = 1, \\ \cos x\cos y-\sin x\sin y = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(x-y) = 1, \\ \cos(x+y) = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x-y = 2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}, \\ \left[\begin{array}{l} x+y = \frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}, \\ x+y = -\frac{\pi}{3}+2\pi l,\ l\in\mathbb{Z} \end{array} \right. \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \frac{\pi}{6}+\pi(k+n), \\ y = \frac{\pi}{6}+\pi(k-n),\ k,n\in\mathbb{Z}, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6}+\pi(l+n), \\ y = -\frac{\pi}{6}+\pi(l-n),\ l,n\in\mathbb{Z}. \end{cases} \end{array} \right.$$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{6}+\pi(k+n);\ \frac{\pi}{6}+\pi(k-n)\right)$; $\left(-\frac{\pi}{6}+\pi(l+n);\ -\frac{\pi}{6}+\pi(l-n)\right)$, $k,n,l\in\mathbb{Z}$.

Пример 7. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-y = \frac{\pi}{2}, \\ \cos^2 x+\sin^2 y = 2. \end{cases}$$

Решение. Так как $\cos^2 x\leqslant 1$ и $\sin^2 y\leqslant 1$, получаем

$$\cos^2 x+\sin^2 y = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 x = 1, \\ \sin^2 y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi n,\ n\in\mathbb{Z}, \\ y = \frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Вспомним, что $x-y=\frac{\pi}{2}$. Тогда

$$\pi n-\frac{\pi}{2}-\pi k=\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \pi(n-k)=\pi \Leftrightarrow n-k=1 \Leftrightarrow n=k+1;\ n,k\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left(\pi(k+1);\ \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k\in\mathbb{Z}$.

Пример 8. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2\sin y = y-2\sin x, \\ x^2+y^2 = 1. \end{cases}$$

Решение. Система равносильна следующей:

$$\begin{cases} x+2\sin x = y+2\sin y, \\ x^2+y^2 = 1. \end{cases}$$

Из второго уравнения следует, что $|x| \leqslant 1$ и $|y| \leqslant 1$. Рассмотрим функцию $g(t) = t + 2\sin t$. На промежутке $[-1; 1]$ функция возрастает как сумма двух возрастающих функций. Значит, $g(x) = g(y) \iff x = y$. Система принимает вид

$$\begin{cases} x = y, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ y = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases} \end{array} \right.$$

Ответ: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Системы, содержащие тригонометрические уравнения

Решите систему уравнений.

1. а) $\begin{cases} 2\cos^2 x - 9\cos x + 4 = 0, \\ 8\cos x + 5y = 9. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0, \\ 4\sin x + 3y = -1. \end{cases}$

2. а) $\begin{cases} 2\cos^2 y + 11\cos y + 5 = 0, \\ 5\cos x - 2\cos y + 4 = 0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2\sin^2 x + 7\sin x + 3 = 0, \\ 7\cos y + 6\sin x - 4 = 0. \end{cases}$

3. а) $\begin{cases} 4\operatorname{tg} x + 5y = -9, \\ 4\operatorname{tg} x - y = -3. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5\operatorname{tg} x - 4y = -17, \\ 5\operatorname{tg} x + y = -2. \end{cases}$

4. а) $\begin{cases} 3\operatorname{tg} x + 4\cos y = 5, \\ 3\operatorname{tg} x + 8\cos y = 7. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 7\operatorname{tg} x + 6\sin y = 4, \\ 7\operatorname{tg} x - 2\sin y = 8. \end{cases}$

5. а) $\begin{cases} (2x - 7\pi)(y + 3\pi) = 0, \\ \sqrt{\sin 3x} + \sqrt{\cos 7y} = 1. \end{cases}$ б) $\begin{cases} (2x - 5\pi)(y + 7\pi) = 0, \\ \sqrt{\sin 3x} + \sqrt{\cos 8y} = 1. \end{cases}$

6. а) $\begin{cases} \sin^2 x + 7\cos y = 8, \\ 2\sin x + 7\cos y = 5. \end{cases}$ б) $\begin{cases} \cos^2 x + 5\sin y = 6, \\ 3\cos x + 7\sin y = 4. \end{cases}$

7. а) $\begin{cases} x = 9\sin y, \\ \sqrt{9x\sin y} = \sin y + 10. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = 19\sin y, \\ \sqrt{19x\sin y} = \sin y + 20. \end{cases}$

8. а) $\begin{cases} \cos(3x - 2y) = -1, \\ \sin(3x + 2y) = 0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} \cos(4x + 5y) = -1, \\ \sin(4x - 5y) = 0. \end{cases}$

9. а) $\begin{cases} 7\cos^2 x + 9\sin^2 y = 9, \\ 7\sin^2 x - 9\cos^2 y = 7. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 6\cos^2 x - 5\sin^2 y = -5, \\ 6\sin^2 x + 5\cos^2 y = 6. \end{cases}$

10. а) $\begin{cases} (16x - 13\pi)(8y - 15\pi) = 0, \\ \sqrt{\operatorname{tg} 4x} + \sqrt{\operatorname{tg} 2y} = 1. \end{cases}$ б) $\begin{cases} (20y + 7\pi)(8x - 7\pi) = 0, \\ \sqrt{\operatorname{tg} 2x} + \sqrt{\operatorname{ctg} 5y} = 1. \end{cases}$

11. а) $\begin{cases} x^2 - 5x + 6 = 0, \\ 2\sin y = x. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - x - 20 = 0, \\ 4\cos y = x. \end{cases}$

12. а) $\begin{cases} (x - 4)(y + 5) = 0, \\ 3\cos \pi x + \sin \frac{\pi y}{2} = 2. \end{cases}$ б) $\begin{cases} (x - 3)(y + 11) = 0, \\ 5\cos \pi x + \sin \frac{\pi y}{2} = -4. \end{cases}$

13. а) $\begin{cases} 4x^2=9y^2, \\ \sin\dfrac{2x-3y}{4}+\sin\dfrac{2x+3y}{6}=1. \end{cases}$

б) $\begin{cases} 25x^2=16y^2, \\ \sin\dfrac{5x-4y}{9}+\sin\dfrac{5x+4y}{7}=1. \end{cases}$

14. а) $\begin{cases} x^2=4\sin y+1, \\ x=2\sin y-1. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2=-8\cos y+81, \\ x=4\cos y-9. \end{cases}$

15. а) $\begin{cases} 11\cos x=5y-4, \\ \cos^2 x=5y+8. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 9\sin x=4y+1, \\ \sin^2 x=4y-7. \end{cases}$

16. а) $\begin{cases} 3\sin^2 x=y+1, \\ 3\cos^2 x=y-2. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 7\cos^2 x=2y+1, \\ 7\sin^2 x=2y-6. \end{cases}$

17. а) $\begin{cases} 2y+3x=7\pi, \\ x\sin\dfrac{2y+3x}{2}=\pi. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x-7y=11\pi, \\ x\cos(4x-7y)=-\pi. \end{cases}$

18. а) $\begin{cases} 3\cos x+2\sin y=-1, \\ 2\cos x+5\sin y=3. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5\cos x-\cos y=-4, \\ 2\cos x-3\cos y=1. \end{cases}$

19. а) $\begin{cases} 2\sin x+3\sin y=5, \\ 3\sin x-2\sin y=1. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3\cos x-5\cos y=8, \\ 5\cos x-7\cos y=12. \end{cases}$

20. а) $\begin{cases} 3x-2\cos y=1, \\ 3x+4\cos y=7. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x+4\sin y=5, \\ 3x+2\sin y=7. \end{cases}$

21. а) $\begin{cases} \sin x=y-2, \\ \cos x=y-1. \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sin x=y-5, \\ \cos x=-y+4. \end{cases}$

22. а) $\begin{cases} x\sin 2y=3, \\ x+\sin 2y=4. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x\cos 7y=3, \\ x+\cos 7y=4. \end{cases}$

23. а) $\begin{cases} x\cos 3y=5\sqrt{3}, \\ x\sin 3y=-5. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x\cos 5y=1, \\ x\sin 5y=1. \end{cases}$

24. а) $\begin{cases} x\,\mathrm{tg}\, y=3, \\ x\,\mathrm{ctg}\, y=1. \end{cases}$ б) $\begin{cases} y\,\mathrm{ctg}\, x=-12, \\ y\,\mathrm{tg}\, x=-4. \end{cases}$

25. а) $\begin{cases} \mathrm{tg}\, x=y-4, \\ \mathrm{ctg}\, x=2y-7. \end{cases}$ б) $\begin{cases} \mathrm{tg}\, x=y+3, \\ \mathrm{ctg}\, x=2y+7. \end{cases}$

Тренировочная работа 11

Решите систему уравнений.

1. $\begin{cases} 2\sin^2 x - 7\sin x + 3 = 0, \\ 6\sin x + 5y = 13. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x^2 - 4x - 5 = 0, \\ 2\sin y = x. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2\operatorname{tg} x + 5y = 12, \\ 2\operatorname{tg} x + 3y = 8. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \sin^2 x + 11\cos y = 12, \\ \sin x + 11\cos y = 10. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x = 13\sin y, \\ \sqrt{13x\sin y} = \sin y + 14. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x^2 = 4\sin y + 1, \\ x = 2\sin y - 1. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2\cos^2 x - \sqrt{2}\cos x = 0, \\ 3y \cdot \operatorname{tg} x = 5. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \sin x = y - 5, \\ \cos x = y - 6. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dfrac{2\cos 2x + 1}{\sqrt{\operatorname{tg} 2x}} = 0, \\ (y^2 - 1)\sqrt{2\sqrt{3}\sin x} = 0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x\sin 5y = 4, \\ x\cos 5y = -4. \end{cases}$

11. $\begin{cases} (2\cos^2 x + \sqrt{2}\cos x)\operatorname{tg} y = 0, \\ \operatorname{tg} x \cdot (y^2 - 2y) = 0. \end{cases}$

12. $\begin{cases} (2\sin^2 y - \sin y)\operatorname{tg} x = 0, \\ (2x^2 - \pi x)\operatorname{ctg} y = 0. \end{cases}$

§ 5. Системы, содержащие показательные уравнения

Основные методы решения систем, содержащих показательные уравнения, ничем принципиально не отличаются от методов решения других систем: это метод алгебраического сложения, замена переменной в пределах одного уравнения или всей системы, подстановка. Единственная особенность — положительность выражения $a^{f(x)}$, которую полезно учитывать, вводя соответствующее ограничение при замене. Перейдем к решению примеров.

Пример 1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 24, \\ x - y = 2. \end{cases}$$

Решение. Система равносильна следующей:

$$\begin{cases} x = 2 + y, \\ 2^{2+y} \cdot 3^y = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + y, \\ 4 \cdot 2^y \cdot 3^y = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6^y = 6, \\ x = 2 + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1, \\ x = 3. \end{cases}$$

Ответ: (3; 1).

Пример 2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2^x + 2^y = 12, \\ x + y = 5. \end{cases}$$

Решение. Система равносильна следующей:

$$\begin{cases} y = 5 - x, \\ 2^x + 2^{5-x} = 12. \end{cases}$$

Решим второе уравнение

$$2^x + \frac{32}{2^x} = 12 \Leftrightarrow 2^{2x} - 12 \cdot 2^x + 32 = 0.$$

Пусть $2^x = a$, $a > 0$. Тогда

$$a^2 - 12a + 32 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 4, \\ a = 8. \end{array} \right.$$

Обратная замена

$$\left[\begin{array}{l} 2^x = 4, \\ 2^x = 8 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = 3. \end{array} \right.$$

Если $x = 2$, то $y = 5 - 2 = 3$; если $x = 3$, то $y = 5 - 3 = 2$.

Ответ: (2; 3); (3; 2).

Пример 3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3^{2x} - 2^{y} = 77, \\ 3^{x} - 2^{\frac{y}{2}} = 7. \end{cases}$$

Решение. Пусть $3^x = a$, $2^{\frac{y}{2}} = b$, $a > 0$, $b > 0$.
Тогда

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 77, \\ a - b = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-b)(a+b) = 77, \\ a - b = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b = 11, \\ a - b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 9, \\ b = 2. \end{cases}$$

Обратная замена:

$$\begin{cases} 3^x = 9, \\ 2^{\frac{y}{2}} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = 2. \end{cases}$$

Ответ: (2; 2).

Пример 4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x \cdot 2^x - y \cdot 4^y = x \cdot 4^y - y \cdot 2^x, \\ 3^x \cdot 9^y = 81. \end{cases}$$

Решение. В первом уравнении перенесем все слагаемые в левую часть уравнения и разложим на множители полученное выражение:

$$\begin{cases} (x+y) \cdot 2^x - (x+y) \cdot 4^y = 0, \\ 3^x \cdot 3^{2y} = 81 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y) \cdot (2^x - 4^y) = 0, \\ 3^{x+2y} = 3^4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + y = 0, \\ x + 2y = 4, \end{cases} \\ \begin{cases} 2^x = 2^{2y}, \\ x + 2y = 4 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -4, \\ y = 4, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2, \\ y = 1. \end{cases} \end{array} \right.$$

Ответ: (−4; 4); (2; 1).

В заключение рассмотрим решение **заданий 9 и 10 части II** вводной диагностической работы.

Пример 5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{81^{\cos y} - 4 \cdot 9^{\cos y} + 3}{\sqrt{1 - 2\sin y}} = 0, \\ \sqrt{x+3} + \cos 2y + 1 = 0. \end{cases}$$

Решение. Поскольку $\sqrt{x+3} \geqslant 0$ и $\cos 2y + 1 \geqslant 0$, второе уравнение системы выполняется только в случае, если $\begin{cases} \sqrt{x+3}=0, \\ \cos 2y+1=0, \end{cases}$ откуда $x=-3$, $y=\pm\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. При $y=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, подкоренное выражение в левой части первого уравнения становится отрицательным, и это значение следует отбросить. Значения $y=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, удовлетворяют первому уравнению системы.

Ответ: $\left(-3; -\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$, $n\in\mathbb{Z}$.

Пример 6. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3\cdot 3^{\operatorname{tg} y}+2 = 3^{-\operatorname{tg} y}, \\ \sqrt{x-2}+6\cos y = 0. \end{cases}$$

Решение. Второе уравнение системы может быть выполнено, только если $\cos y \leqslant 0$. Умножим обе части первого уравнения системы на $3^{\operatorname{tg} y}$ и приведем его к к виду $3(3^{\operatorname{tg} y})^2 + 2\cdot 3^{\operatorname{tg} y} - 1 = 0$. Решая полученное уравнение как квадратное относительно $3^{\operatorname{tg} y}$, находим $3^{\operatorname{tg} y} = -1$ (что невозможно) либо $3^{\operatorname{tg} y} = \frac{1}{3}$, откуда $\operatorname{tg} y = -1$. С учетом условия $\cos y \leqslant 0$, получаем, что $y = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. При этом $\cos y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, и второе уравнение системы принимает вид $\sqrt{x-2} - 3\sqrt{2}=0$, откуда $x=20$.

Ответ: $\left(20; \frac{3\pi}{4}+2\pi n\right)$, $n\in\mathbb{Z}$.

Системы, содержащие показательные уравнения

Решите систему уравнений.

1. а) $\begin{cases} 3\cdot 8^x+7^y=31, \\ 2\cdot 8^x-7^y=9. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5\cdot 5^x-6^y=19, \\ 2\cdot 5^x+6^y=16. \end{cases}$

2. а) $\begin{cases} 5x+2\cdot 3^y=33, \\ 7x-2\cdot 3^y=3. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 7x-2\cdot 2^y=19, \\ 9x+2\cdot 2^y=61. \end{cases}$

3. а) $\begin{cases} x\cdot 13^{y-4}=65, \\ x\cdot 7^{y-3}=245. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x\cdot 13^{y-9}=-91, \\ x\cdot 2^{y-7}=-56. \end{cases}$

4. а) $\begin{cases} 3x+64^y=79, \\ 3x+8^y=23. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 7x+16^y=-12, \\ 7x+4^y=-24. \end{cases}$

5. а) $\begin{cases} x+5^y=130, \\ x^2+5^y=150. \end{cases}$ б) $\begin{cases} -3x+6^y=33, \\ x^2+6^y=37. \end{cases}$

6. а) $\begin{cases} 3^x\cdot 2^y=72, \\ 3^x+2^y=17. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5^x\cdot 2^y=200, \\ 5^x+2^y=33. \end{cases}$

7. а) $\begin{cases} 3^x+5^y=34, \\ 3^{x+1}+5^{y-1}=32. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 7^x+5^y=174, \\ 7^{x-1}+5^{y-1}=32. \end{cases}$

8. а) $\begin{cases} 5^{x-2}\cdot 8^{y-1}=1, \\ 5^x+8^{y+1}=89. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4^{x-2}\cdot 3^{y-4}=1, \\ 4^{x+1}+3^{y-3}=67. \end{cases}$

9. а) $\begin{cases} 3^{x+4}\cdot 2^{y+5}=108, \\ 2^{y+6}:3^{x+1}=8. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4^{x+4}\cdot 3^{y+3}=144, \\ 3^{y+5}:4^{x+2}=81. \end{cases}$

10. а) $\begin{cases} 2^x\cdot 5^y=40, \\ 2^x\cdot 7^y=56. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2^x\cdot 7^y=112, \\ 2^x\cdot 9^y=144. \end{cases}$

11. а) $\begin{cases} 3^x=y, \\ 9^x=2y+3. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5^x=y, \\ 25^x=4y+5. \end{cases}$

12. а) $\begin{cases} (x+7)(y-5)=0, \\ 7^{y-5}=5^{x+7}. \end{cases}$ б) $\begin{cases} (x+9)(y-8)=0, \\ 9^{y-8}=8^{x+9}. \end{cases}$

13. а) $\begin{cases} y\cdot 6^x=7, \\ \frac{1}{7}y\cdot 6^{3x-1}=6. \end{cases}$ б) $\begin{cases} y\cdot 7^x=2, \\ \frac{1}{2}y\cdot 7^{5x-2}=49. \end{cases}$

14. а) $\begin{cases} 7^x+2^y=9, \\ 7^{x+1}-2^{y+4}=17. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4^x-3^y=-5, \\ 4^{x+1}-3^{y+1}=-11. \end{cases}$

15. а) $\begin{cases} 3^{2x+y^2}=9^{x+2y}, \\ \dfrac{x-y+5}{y-4}=0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 6^{2x+y^2}=36^{x+2y}, \\ \dfrac{x+y-6}{y-4}=0. \end{cases}$

16. а) $\begin{cases} (x^2-4)(y-5)=0, \\ \dfrac{2^{x+y-8}-64^{0,5}}{5^{x+2}-1}=0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} (x^2-49)(y+4)=0, \\ \dfrac{2^{x+y+13}-16^{0,5}}{9^{x+7}-1}=0. \end{cases}$

17. а) $\begin{cases} x\cdot 3^{\sqrt{y}}=12, \\ \sqrt{x}\cdot 3^y=6. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x\cdot 2^{-3\sqrt{y}}=2, \\ \sqrt{x}\cdot 2^y=8. \end{cases}$

18. а) $\begin{cases} y^2=4\cdot 5^x+2x+3, \\ y^2=3\cdot 5^x+2x+8. \end{cases}$ б) $\begin{cases} y^2=5\cdot 2^x-7x+1, \\ y^2=2\cdot 2^x-7x+7. \end{cases}$

19. а) $\begin{cases} 7^x\cdot 49^{3y^2}=1, \\ x^2+6y^2=42. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 8^x\cdot 64^{2y^2}=1, \\ x^2+4y^2=20. \end{cases}$

20. а) $\begin{cases} 2^x\cdot 7^x\cdot 11^x=14^{y^2}\cdot 11^{y^2}, \\ x^2-3y^2=4. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 8^x\cdot 7^x\cdot 9^x=56^{y^2}\cdot 9^{y^2}, \\ x^2+6y^2=7. \end{cases}$

21. а) $\begin{cases} 3^x\cdot 5^y=45, \\ 5^x\cdot 3^y=75. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 7^x\cdot 2^y=28, \\ 2^x\cdot 7^y=98. \end{cases}$

22. а) $\begin{cases} 2^{x+3}\cdot 7^{y+1}=14^{xy}, \\ 7^x+2^y=15. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2^{x+2}\cdot 5^{y+1}=10^{x+y}, \\ 5^x+2^y=9. \end{cases}$

23. а) $\begin{cases} (x-3)\cdot 7^{y+3}=(y-2)\cdot 7^{x+2}, \\ x+y=5. \end{cases}$

б) $\begin{cases} (x-3)\cdot 11^{y-3}=(y-6)\cdot 11^{x-7}, \\ x+y=9. \end{cases}$

24. а) $\begin{cases} x^{15}=19^y, \\ x^2-18x-19=0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^{19}=14^y, \\ x^2-13x-14=0. \end{cases}$

25. а) $\begin{cases} (x-1)\cdot 3^x=5y, \\ (x-1)\cdot 5^x=3y. \end{cases}$ б) $\begin{cases} (x+17)\cdot 7^x=4y, \\ (x+17)\cdot 4^x=7y. \end{cases}$

Тренировочная работа 12

Решите систему уравнений.

1. $\begin{cases} 3^x = y, \\ 9^x = 2y + 3. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2^x \cdot 7^y = 28, \\ 2^x + 7^y = 11. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 11^x + 8^y = 75, \\ 3 \cdot 11^x + 8^y = 97. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^{13} = 12^y, \\ x^2 - 11x - 12 = 0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} y^2 = 4 \cdot 5^x + 2x + 3, \\ y^2 = 3 \cdot 5^x + 2x + 8. \end{cases}$

6. $\begin{cases} (x+16) \cdot 7^x = 9y, \\ (x+16) \cdot 9^x = 7y. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2^x - 3^y = 1, \\ 2^{x+2} - 3^{y+1} = 7. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dfrac{(4^x - 2^6)(4^x - 16^5)}{(2y-9)(8x-5)} = 0, \\ 5^y = 16 - 2x. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 7^{x+3} \cdot 3^{y-2} = 21, \\ 7^{x+2} + 3^{y+1} = 82. \end{cases}$

10. $\begin{cases} y \cdot 5^x = 2, \\ 2y \cdot 5^{2x+1} = 25. \end{cases}$

11. $\begin{cases} (y^2 + 3y - 4)(3^{x+1} - 27) = 0, \\ 2^x - 4^y = 0. \end{cases}$

12. $\begin{cases} (2x-1)(y^2 + y - 6) = 0, \\ 2^x - 4^y = 0. \end{cases}$

§ 6. Системы, содержащие логарифмические уравнения

При решении систем, содержащих логарифмические уравнения, часто удается, избавившись от логарифма, заменить одно или оба уравнения системы рациональными уравнениями. После этого нужно выразить одну переменную через другую и после подстановки получить уравнение с одной переменной. Кроме того, довольно распространены задачи на замену переменной в пределах одного или обоих уравнений системы и системы, требующие отбора решений.

Пример 1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \lg x - \lg y = 1, \\ \lg^2 x + \lg^2 y = 5. \end{cases}$$

Решение. Пусть $\begin{cases} \lg x = a, \\ \lg y = b. \end{cases}$ Тогда

$$\begin{cases} a - b = 1, \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 2, \\ b = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} a = -1, \\ b = -2. \end{cases} \end{array} \right.$$

Обратная замена

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \lg x = 2, \\ \lg y = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} \lg x = -1, \\ \lg y = -2 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 100, \\ y = 10, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 0{,}1, \\ y = 0{,}01. \end{cases} \end{array} \right.$$

Ответ: (100; 10); (0,1; 0,01).

Пример 2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - \log_3 x = 1, \\ x^y = 3^{12}. \end{cases}$$

Решение. Система равносильна следующей:

$$\begin{cases} y = 1 + \log_3 x, \\ x^{1+\log_3 x} = 3^{12}. \end{cases}$$

Решим второе уравнение:

$$x^{1+\log_3 x} = 3^{12} \iff \log_3\left(x^{1+\log_3 x}\right) = \log_3 3^{12} \iff (1+\log_3 x)\log_3 x = 12.$$

Пусть $\log_3 x = t$. Тогда $t^2 + t - 12 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} t=-4, \\ t=3. \end{array}\right.$

Отсюда $\left[\begin{array}{l} \log_3 x = -4, \\ \log_3 x = 3 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{81}, \\ x = 27. \end{array}\right.$

Поскольку $y = 1 + \log_3 x$, получаем $y_1 = -3$, $y_2 = 4$.

Ответ: $\left(\frac{1}{81}; -3\right)$; $(27; 4)$.

Пример 3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_2(x^2+y^2) = 5, \\ 2\log_4 x + \log_2 y = 4. \end{cases}$$

Решение. Из второго уравнения системы следует, что $\begin{cases} x > 0, \\ y > 0. \end{cases}$

Из первого уравнения системы получаем

$$\log_2(x^2+y^2) = 5 \iff x^2 + y^2 = 32.$$

Из второго уравнения

$$2\log_4 x + \log_2 y = 4 \iff \log_2 x + \log_2 y = 4 \Rightarrow \log_2 xy = 4 \Rightarrow xy = 16.$$

Тогда $\begin{cases} x^2+y^2=32, \\ xy=16 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+y^2-2xy=0, \\ x^2+y^2+2xy=64 \end{cases} \iff \begin{cases} (x-y)^2=0, \\ (x+y)^2=64. \end{cases}$

Поскольку $x > 0$, $y > 0$, то $\begin{cases} x=y, \\ x+y=8 \end{cases} \iff \begin{cases} x=4, \\ y=4. \end{cases}$

Ответ: $(4; 4)$.

В заключение рассмотрим решение **двух последних заданий части II** вводной диагностической работы.

Пример 4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 8\log_9(xy) = \log_9 x^8, \\ 5x + 2y + 22 = 0. \end{cases}$$

Решение. Из первого уравнения системы следует, что $xy > 0$, т. е. числа x и y одного знака. Если они оба положительны, то левая часть второго уравнения больше нуля и система не имеет решений. Значит, $x < 0$ и $y < 0$. Рассмотрим первое уравнение системы:

$$8\log_9(xy) = 8\log_9|x| \iff \log_9(xy) = \log_9|x| \iff xy = |x|.$$

Поскольку $x<0$, получаем $xy=-x$, и, следовательно, $y=-1$. Тогда из второго уравнения находим $5x-2+22=0$, откуда $x=-4$.

Ответ: $(-4; -1)$.

Пример 5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{2\log_2^2(\sin x)+3\log_2(\sin x)+1}{\log_3(-\cos x)}=0, \\ \sqrt{y-7}=\sqrt{2}\cos x+1. \end{cases}$$

Решение. Из первого уравнения системы следует, что $\cos x<0$ и $\cos x\neq -1$. Числитель дроби в левой части первого уравнения равен нулю, если $2\log_2^2(\sin x)+3\log_2(\sin x)+1=0$. Рассмотрев полученное уравнение как квадратное относительно $\log_2(\sin x)$, находим, что $\log_2(\sin x)=-1$ либо $\log_2(\sin x)=-0{,}5$. Поэтому $\sin x=0{,}5$ либо $\sin x=\frac{1}{\sqrt{2}}$. С учетом условия $\cos x<0$ получаем, что если $\sin x=0{,}5$, то $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (и тогда правая часть второго уравнения системы отрицательна, что противоречит неотрицательности арифметического квадратного корня), а если $\sin x=\frac{1}{\sqrt{2}}$, то $\cos x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$. В последнем случае $x=\frac{3\pi}{4}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, и тогда из второго уравнения системы находим $\sqrt{y-7}=-1+1$, откуда $y=7$.

Ответ: $\left(\frac{3\pi}{4}+2\pi n; 7\right)$, $n\in\mathbb{Z}$.

Системы, содержащие логарифмические уравнения

Решите систему уравнений

1. а) $\begin{cases} 4x - \log_2 y = -12, \\ 4x + \log_2 y = -4. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 7x + \log_7 y = -26, \\ 7x - \log_7 y = -30. \end{cases}$

2. а) $\begin{cases} \log_{y+2}(x+3) = 1, \\ x^2 - 3y = 7. \end{cases}$ б) $\begin{cases} \log_{y-7}(x+4) = 1, \\ x^2 - 2y = -7. \end{cases}$

3. а) $\begin{cases} \log_5 x + \log_3 y + y = 2, \\ \log_5 x + \log_3 y - 2y = -7. \end{cases}$ б) $\begin{cases} \log_8 x + \log_4 y + 3y = 11, \\ \log_8 x + \log_4 y + y = 3. \end{cases}$

4. а) $\begin{cases} \log_7 xy = 2, \\ x + y + 50 = 0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} \log_2(xy) = 4, \\ x + y + 17 = 0. \end{cases}$

5. а) $\begin{cases} \log_3^2 x - \log_7 y = 3, \\ \log_3 x - \log_7 y = 1. \end{cases}$ б) $\begin{cases} \log_5^2 x + \log_2 y = -1, \\ 3\log_5 x + \log_2 y = 1. \end{cases}$

6. а) $\begin{cases} 7\log_5 x - 3y = 4, \\ 2\log_5 x - 5y = -3. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4\log_6 x + 3y = -7, \\ 5\log_6 x - 9y = 4. \end{cases}$

7. а) $\begin{cases} \log_5(-5xy) - \log_5 x = 1, \\ x^2 y = -26. \end{cases}$ б) $\begin{cases} \log_3(-81xy) - \log_3 x = 4, \\ x^2 y = -25. \end{cases}$

8. а) $\begin{cases} y\log_x 5 = -4, \\ y + \log_x 5 = 7{,}5. \end{cases}$ б) $\begin{cases} y\log_x 3 = 7{,}5, \\ y + \log_x 3 = 6{,}5. \end{cases}$

9. а) $\begin{cases} 4\log_7 xy = \log_7 x^4, \\ 2x + 3y = -20. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4\log_4(xy) = \log_4 x^4, \\ 5x + 2y = 12. \end{cases}$

10. а) $\begin{cases} 2\log_3 x = y - 4, \\ 3\log_x 3 = y - 3. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3\log_2 x = y + 1, \\ 2\log_x 2 = y + 2. \end{cases}$

11. а) $\begin{cases} (\log_3 x - 2)\left(\log_{\frac{1}{7}} y - 1\right) = 0, \\ \log_{\frac{1}{7}}(x-2) + \log_3(y-1) = -1. \end{cases}$

б) $\begin{cases} (\log_2 x - 2)\left(\log_{\frac{1}{3}} y - 3\right) = 0, \\ \log_{\frac{1}{3}}(x+5) + \log_2(y-3) = -2. \end{cases}$

12. а) $\begin{cases} \log_9 x + \log_9 y = \log_9 4 + \log_9 8, \\ \log_9(x+y) = \log_9 12. \end{cases}$

б) $\begin{cases} \log_6 x + \log_6 y = \log_6 2 + \log_6 3, \\ \log_6(x+y) = \log_6 5. \end{cases}$

13. а) $\begin{cases} x^2+2\log_x y=6, \\ 3x+2\log_x y=8. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+3\log_x y=22, \\ 5x+3\log_x y=26. \end{cases}$

14. а) $\begin{cases} \log_3(3xy)-\log_3(-3x)=2, \\ x^2-y-10=0. \end{cases}$

б) $\begin{cases} \log_3(5xy)-\log_3(-5x)=2, \\ x^2+5y+41=0. \end{cases}$

15. а) $\begin{cases} (x-2)(y-3)=0, \\ \log_7(x+y-3)+\log_3(1-xy+y)=\log_7 x, \end{cases}$

б) $\begin{cases} (x-7)(y-4)=0, \\ \log_4(x+y-4)+\log_5(-3-xy+6y)=\log_4 x. \end{cases}$

16. а) $\begin{cases} 5\log_9 x-\log_2 y=4, \\ 7\log_9 x-2\log_2 y=5. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5\log_2 x-2\log_5 y=3, \\ 2\log_2 x-3\log_5 y=-1. \end{cases}$

17. а) $\begin{cases} (2x-3y)\log_5(3x+2y-7)=0, \\ \dfrac{4x-y}{3x+2y-8}=2. \end{cases}$

б) $\begin{cases} (5x-7y)\log_8(6x-y-3)=0, \\ \dfrac{25x-2y}{6x-y-4}=5. \end{cases}$

18. а) $\begin{cases} \log_x 5+\log_y 7=\dfrac{3}{2}, \\ \log_5 x+\log_7 y=3. \end{cases}$ б) $\begin{cases} \log_x 2+\log_y 3=-\dfrac{3}{4}, \\ \log_2 x+\log_3 y=3. \end{cases}$

19. а) $\begin{cases} \log_x(y-3)=1, \\ \log_y(x-9)=1. \end{cases}$ б) $\begin{cases} \log_x(y+3)=1, \\ \log_y(8-x)=1. \end{cases}$

20. а) $\begin{cases} (y-4)\log_3 x=9, \\ (y-4)\log_x 3=1. \end{cases}$ б) $\begin{cases} (y+3)\log_2 x=36, \\ (y+3)\log_x 2=1. \end{cases}$

21. а) $\begin{cases} \log_{2x-3y}(4x-y)=1, \\ \log_3(2x-3y)\cdot\log_2(3x+2y)=0. \end{cases}$

б) $\begin{cases} \log_{4x+7y}(9x+2y)=1, \\ \log_5(4x+7y)\cdot\log_9(6x-5y)=0. \end{cases}$

22. а) $\begin{cases} (x-5)(y-4)(x-9)=0, \\ \log_{x-4}5\cdot\log_5(y-3)=2. \end{cases}$ б) $\begin{cases} (x+6)(y-6)(x-8)=0, \\ \log_{x+7}15\cdot\log_4(y-5)=2. \end{cases}$

23. а) $\begin{cases} x^2 - xy + 12 = 0, \\ \dfrac{(y-6)(y-7)}{\log_{x-2}(y-5)} = 0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - xy + 24 = 0, \\ \dfrac{(y-3)(y-10)}{\log_{x-3}(y-2)} = 0. \end{cases}$

24. а) $\begin{cases} \log_3(x-7) \cdot \log_7(y-3) = 0, \\ \dfrac{2x+y}{(x-8)(y-2)} = -4. \end{cases}$

б) $\begin{cases} \log_2(x-1) \cdot \log_3(y-14) = 0, \\ \dfrac{3x+2y}{(x-2)(y-12)} = 5. \end{cases}$

25. а) $\begin{cases} \log_5(2x+3y)^6 = 6, \\ \dfrac{2x-3y+15}{2x+3y-5} = -2. \end{cases}$ б) $\begin{cases} \log_4(4x-7y)^4 = 4, \\ \dfrac{4x+7y-28}{4x-7y-4} = 3. \end{cases}$

Тренировочная работа 13

Решите систему уравнений.

1. $\begin{cases} 7x+\log_3 y=37, \\ 7x-\log_3 y=33. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \log_{y-7}(x+5)=1, \\ x^2+7y=72. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^2-x-2=0, \\ 2\log_x y=3. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^2-4x+3=0, \\ \log_x 5y=2. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^2-7x-8=0, \\ \log_y 2x=2. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x^3-4x^2+3x=0, \\ (5-3y)\log_3 x=2. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \log_8 x+\log_8 y=\log_8 5+\log_8 7, \\ \log_8(x+y)=\log_8 12. \end{cases}$

8. $\begin{cases} (2y-9)\log_{y-3}(x-5)=0, \\ (x+1)(\log_{x-7}(y-4)-1)=0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x(x-1)(x-2)(x-3)=0, \\ y\log_x\left(x-\frac{5}{2}\right)=2. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x^3-4x^2+3x=0, \\ \log_y 3x=2. \end{cases}$

11. $\begin{cases} (x-7)(y-8)=0, \\ \log_7(x+y-8)+ \\ \quad +\log_8(1-xy+6y)=\log_7 x. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 3\log_5 x-2\log_7 y=1, \\ 2\log_5 x-3\log_7 y=-1. \end{cases}$

Диагностическая работа 4

Решите систему уравнений.

1. $\begin{cases} \frac{x}{2}+\frac{y}{3}=5, \\ \frac{x}{3}+\frac{y}{2}=5. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x^2-2x=y, \\ 3x-2=y. \end{cases}$

3. $\begin{cases} |x-2y|=5, \\ y(x-2y-5)=20. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{5}{y}=2, \\ \frac{5}{x}+\frac{3}{y}=2. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \frac{x}{y^2}=5, \\ \frac{x+y^4}{y^2}=3y+5. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 0{,}25^x+0{,}5^x-6=0 \\ 3^y+5x=-2. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3^y+4x=9, \\ 3^{y+1}-6x=0. \end{cases}$

8. $\begin{cases} (2\cos^2 x+\sqrt{2}\cos x)\operatorname{ctg} y=0, \\ \operatorname{tg} x\cdot(y^2-2y)=0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x\log_{x+1}(x+3)=0, \\ 4\cdot\left(2^x-\frac{y}{6}\right)=\frac{5}{2}. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 49^{\operatorname{tg} x}+7^{\operatorname{tg} x+1}-98=0, \\ \sqrt{-2\cos x}+2y=7\sqrt[4]{2}. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 3\cos 2x+5\cos x=-2, \\ y^2\sin x+y\sin x+\frac{\sqrt{35}}{3}=0. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \frac{\sin 2x-\sin x}{\sqrt{y+1}}=0, \\ y=4\cos x-3. \end{cases}$

Диагностическая работа 5

Решите систему уравнений.

1. $\begin{cases} \dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{5}=4, \\ \dfrac{x}{10}+\dfrac{y}{8}=2. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x+3y=7, \\ 2x^2+y=9. \end{cases}$

3. $\begin{cases} |x+3y|=2y+3, \\ |2y+3|=5. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{12}{x}+\dfrac{25}{y}=7, \\ \dfrac{6}{x}+\dfrac{5}{y}=2. \end{cases}$

5. $\begin{cases} (x-6)(y-7)=0, \\ \dfrac{y-4}{x+y-10}=3. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \sqrt{x}=\dfrac{12}{\sqrt{y}}, \\ y^2+\sqrt{xy}-3y-16=0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2y-3\sin x=1, \\ \sin x+3y=0. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 1{,}25\left(\dfrac{3}{2}\right)^y+\dfrac{9^y}{4^y}=-2{,}25 \\ \dfrac{1}{3^x}=2y-1. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2^y-3x=10, \\ \sqrt{3x^2+x-12}=\sqrt{x^2+5x-12}. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 6y+2\cos x=1, \\ \dfrac{13^{x^2-7}}{19^{\sqrt{x}}}=\dfrac{169}{19^{\sqrt{x}}}. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 3^x-2\cos y=0, \\ 4\sin^2 y+4\sin y-3=0. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \sqrt{\cos y}\cdot\sqrt{-8-6x-x^2}=0, \\ \sqrt{-\sin x}\cdot\sqrt{y^2-y-2}=0. \end{cases}$

Ответы

Диагностическая работа

Часть I. Уравнения

1. $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{5}{3}$; $\frac{11}{6}$. **2.** -3; $[3; +\infty)$. **3.** 1. **4.** 4. **5.** 0; 5. **6.** 1,2; 2. **7.** $\frac{\pi n}{4}$; $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $n, k \in \mathbb{Z}$. **8.** 1. **9.** 0; 3. **10.** $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **11.** -4; 4. **12.** $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$; 8.

Часть II. Системы уравнений

1. $(3; 2)$; $(2; 3)$; $(5; 1)$; $(1; 5)$. **2.** $(-0{,}5; -0{,}5; 0{,}5)$. **3.** $(3; 2)$; $(-3; -2)$. **4.** $(1; 1)$; $(1; 0{,}5)$. **5.** $(4; 25)$; $(25; 4)$. **6.** $(5; 4)$; $(-9; 25)$. **7.** $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; 2\right)$, $n \in \mathbb{Z}$; $\left(-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; 2\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. **8.** $\left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; -6\right)$, $n \in \mathbb{Z}$. **9.** $\left(-3; -\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$. **10.** $\left(20; \frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$. **11.** $(-4; -1)$. **12.** $\left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi n; 7\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Целые алгебраические уравнения

1. а) $-\frac{7}{2}$; б) -2. **2.** а) 0; б) 0. **3.** а) 6; б) 14. **4.** а) 9; б) -18. **5.** а) 9; б) 10. **6.** а) 17; 22; б) -21; -16. **7.** а) -4; 4; б) -3; 3. **8.** а) 3; б) -1. **9.** а) $\frac{9}{5}$; 2; б) $-\frac{6}{5}$; -1. **10.** а) -2; 0; 2; б) -5; 0; 5. **11.** а) 2; $\frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$; б) -5; -2; -1. **12.** а) 2; 3; б) -8; 2. **13.** а) -14; -8; -2; б) -4; 1; 6. **14.** а) -1; б) -1. **15.** а) 0; 1,5; 3; б) -9; $-1{,}8$; 0. **16.** а) -2; -1; 1; 2; б) нет решений. **17.** а) 1; 4; б) -3; 5. **18.** а) $\left(-\infty; \frac{7}{5}\right]$; б) $\left(-\infty; -\frac{3}{7}\right]$. **19.** а) 1; б) 1. **20.** а) -2; 2; б) -1; 1. **21.** а) 1; 2; 3; б) -2; 4; 6. **22.** а) 2; б) 2. **23.** а) 1; 2; 3; б) 1; 2; 3. **24.** а) 1; б) 1. **25.** а) 2; б) 3.

Тренировочная работа 1

1. -3; -2; 3; 4. **2.** -9; -1. **3.** 1; 16. **4.** $\frac{-3 - \sqrt{14}}{2}$; $\frac{-3 + \sqrt{14}}{2}$; 1; 1,5. **5.** 1. **6.** 4. **7.** $\frac{1}{3}$; 1; 3. **8.** -2; 4. **9.** -2; $\frac{2}{3}$; 2. **10.** 1. **11.** -2. **12.** $(3; 2)$.

Тренировочная работа 2

1. 2. **2.** 1. **3.** 4. **4.** 0; 2. **5.** 1; 2,5; 3,5; 5. **6.** $-0{,}5$; 1,5. **7.** $-1{,}6$; 2. **8.** -4; 4. **9.** -3; -1; 2; 4. **10.** $[-7; -4] \cup [1; 4]$. **11.** $\{-3\} \cup [3; +\infty)$. **12.** $(-\infty; -5] \cup \left[\frac{11 - \sqrt{233}}{2}; 4\right] \cup \left[\frac{11 + \sqrt{233}}{2}; +\infty\right)$.

Дробно-рациональные уравнения

1. а) $\pm\frac{3}{7}$; б) $\pm\frac{8}{5}$. **2.** а) -1; б) -6. **3.** а) -8; -6; 5; б) 2; 4; 7. **4.** а) $-\frac{1}{6}$; $\frac{1}{5}$; б) $-\frac{1}{4}$; $\frac{1}{2}$. **5.** а) -2; б) -5; 6. **6.** а) -4; б) 0,5. **7.** а) 2; 4; б) -5; 8. **8.** а) 1; б) 1. **9.** а) -6; б) 8. **10.** а) 1; 4; б) -5; 1. **11.** а) -4; б) -1. **12.** а) 3; б) -9. **13.** а) 1; б) -8. **14.** а) -8; б) 5. **15.** а) -4; б) 1. **16.** а) -5; б) -3. **17.** а) 1; б) -1. **18.** а) -2; б) 7. **19.** а) 1,5; б) $-\frac{4}{3}$. **20.** а) 11; б) -13. **21.** а) $\left(-\infty; \frac{5}{7}\right)$; б) $\left(-\infty; -\frac{8}{5}\right)$. **22.** а) $[2; 5)\cup(5; +\infty)$; б) $[-1; 3)\cup(3; +\infty)$. **23.** а) -4; 6; 8; б) -9; 4; 6. **24.** а) $(-\infty; -12)\cup(12; +\infty)$; б) $(-\infty; -16)\cup$ $\cup(11; +\infty)$. **25.** а) 1; 2; 3; 4; б) 2; 3; 4.

Тренировочная работа 3

1. 3. **2.** 0. **3.** -4; $-1-2\sqrt{2}$; $-1+2\sqrt{2}$; 2. **4.** -3; 3. **5.** -4; -3; 2; 3. **6.** 1,2; 2,4. **7.** -1. **8.** 0. **9.** 0. **10.** -2; 2. **11.** -3. **12.** -2; 1.

Иррациональные уравнения

1. а) 1; б) 2. **2.** а) -3; б) -5. **3.** а) $-1{,}2$; б) $\frac{8}{3}$. **4.** а) -4; 3; б) -8; 7. **5.** а) 1; б) 1. **6.** а) 16; б) 13. **7.** а) 1; б) 1. **8.** а) $\frac{1}{3}$; 3; б) 2; 4. **9.** а) 5; б) 7. **10.** а) 1,5; б) 3,5. **11.** а) 1; 2; б) -5; 2. **12.** а) $\frac{1}{9}$; 1; б) 1; $\frac{9}{4}$. **13.** а) -2; б) 5. **14.** а) 6; б) 2. **15.** а) нет решений; б) $\frac{5}{3}$. **16.** а) 7; б) 8. **17.** а) 6; б) 8. **18.** а) 5; 6; б) -3; 8. **19.** а) -5; 4; б) -5; 7. **20.** а) -8; б) -8. **21.** а) 4; б) 4. **22.** а) 2; б) 6. **23.** а) 1; б) 5. **24.** а) 8; 9; б) -6; 2. **25.** а) 2,5; б) 4,5.

Тренировочная работа 4

1. Решений нет. **2.** 0; 13. **3.** $-\frac{1}{2}$. **4.** Решений нет. **5.** $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; 2; 3. **6.** -5; $-\frac{7}{3}$. **7.** -2; -1; 3. **8.** 1. **9.** -1; $-\frac{1}{2}$. **10.** 3. **11.** 16. **12.** -3; $\frac{3}{2}$.

Тригонометрические уравнения

1. а) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$; б) $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$. **2.** а) $\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n$; б) $\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi n$. **3.** а) $\frac{\pi}{3}+\pi n$; б) $-\frac{\pi}{6}+\pi n$. **4.** а) $(-1)^n\arcsin\frac{2}{3}+\pi n$; б) $(-1)^{n+1}\arcsin\frac{4}{5}+\pi n$. **5.** а) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{40}+\frac{\pi n}{10}$; б) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{72}+\frac{\pi n}{12}$. **6.** а) $\pm\frac{\pi}{72}+\frac{\pi n}{6}$; б) $\pm\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$. **7.** а) $\frac{\pi}{4}+\pi n$; б) $\frac{\pi}{4}+\pi n$. **8.** а) $\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n$; б) $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$. **9.** а) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+$ $+\pi n$; б) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$. **10.** а) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$; б) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$. **11.** а) $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$; б) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$. **12.** а) $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$; б) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$. **13.** а) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$;

б) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$. **14.** а) πn; $\pm\arccos\frac{1}{7}+2\pi n$; б) πn; $\pm\arccos\frac{1}{9}+2\pi n$. **15.** а) $(-1)^n\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{8}+\frac{\pi n}{2}$; б) $(-1)^n\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{7}+\frac{\pi n}{2}$. **16.** а) $\frac{5\pi}{7}$; б) $\frac{7\pi}{8}$. **17.** а) $-\frac{7\pi}{4}$; б) $\frac{9\pi}{4}$. **18.** а) $\arccos\frac{3}{4}+2\pi n$; б) $\arccos\frac{5}{7}+2\pi n$. **19.** а) $\arcsin\frac{2}{5}+$ $+2\pi n$; б) $-\arcsin\frac{5}{6}+2\pi n$. **20.** а) $-\operatorname{arctg}3+2\pi n$; б) $\pi-\operatorname{arctg}4+2\pi n$. **21.** а) $\frac{\pi}{4}+2\pi n$; б) $\frac{7\pi}{6}+2\pi n$. **22.** а) нет решений; б) 3. **23.** а) $-\frac{2}{3}$; б) $-\frac{4}{5}$. **24.** а) $\pi+2\pi n$; $(-1)^n\arcsin\frac{2}{3}+\pi n$; б) $\pi+2\pi n$; $(-1)^n\arcsin\frac{2}{7}+\pi n$. **25.** а) $\frac{\pi}{8}+$ $+\frac{\pi n}{2}$; б) $-\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi n}{5}$. **26.** а) $\frac{1}{\sqrt{10}}$; б) $\frac{2}{\sqrt{5}}$. **27.** а) 1,4; б) $-9-4\sqrt{5}$. **28.** а) $\frac{9\sqrt{8}+\sqrt{19}}{30}$; б) $\frac{6\sqrt{5}-1}{25}$. **29.** а) 1; б) $\frac{4}{7}$. **30.** а) $-0{,}5$; 0,9; б) -2; 3,6. **31.** а) 0; 0,5; 1; б) 0. **32.** а) 0; 2; б) -2; 0,5; 2. **33.** а) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$; б) 1. **34.** а) 0,5; б) 2. **35.** а) 0,5; б) 1. **36.** а) 0,5; б) 0. **37.** а) -3; б) 1. **38.** а) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; б) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. **39.** а) $-\frac{13}{12}$; б) 3,5. **40.** а) $(-2; 0)$; б) $(1; 0)$. **41.** а) 1; б) 1; $\frac{2}{3}$. **42.** а) 2; б) 1. **43.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) 1. **44.** а) $-0{,}5$; 0; 0,5; б) $\pm\sqrt{2}$; 0. **45.** а) $\frac{1}{8}$; б) 0; 0,5. **46.** а) 0; 1; б) $\sqrt{2}$. **47.** а) -1; 0; 1; б) 0; 2. **48.** а) $(2; -0{,}5)$; б) $(2; -0{,}5)$. **49.** а) $(3; -4)$; б) $(6; 5)$. **50.** а) $(1; -1)$; б) $(1; -1)$.

Тренировочная работа 5.1

1. $x=-\frac{17\pi}{36}+\pi k$, $x=\frac{13\pi}{36}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. **2.** $x=\frac{4}{3}+4n$, $n\in\mathbb{Z}$; $x=\frac{2}{5}+\frac{4k}{5}$, $k\in\mathbb{Z}$. **3.** Решений нет. **4.** $x=\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. **5.** $x=-\frac{\pi}{6}+2\pi n$; $x=\frac{7\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. **6.** $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $x=(-1)^n\arcsin\frac{1}{5}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. **7.** $x=\frac{9\pi}{5}$. **8.** $x=-\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. **9.** $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$. **10.** $x=\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. **11.** $\frac{7\pi}{9}$. **12.** $\pm\arccos\frac{7}{8}+$ $+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

Тренировочная работа 5.2

1. $\frac{1}{9}$. **2.** $-\frac{10}{7}$. **3.** $-\frac{1}{2}$; $\frac{9}{10}$. **4.** $\frac{1}{2}$. **5.** $\frac{1}{2}$. **6.** $\sin 1$. **7.** $\frac{1}{2}$; 1. **8.** -1. **9.** $\frac{1}{4}$. **10.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **11.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **12.** $\frac{1}{2}$.

Показательные уравнения

1. а) 1; б) 1. **2.** а) -24; б) -21. **3.** а) 17; б) 26. **4.** а) 2; б) 2. **5.** а) $-1{,}4$; б) 2,5. **6.** а) 1; б) 1. **7.** а) -1; б) -1. **8.** а) 1; б) 1. **9.** а) -2; б) -2. **10.** а) -1; 0; б) -3; 0. **11.** а) -1; б) -1. **12.** а) -2; б) -4. **13.** а) $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{2}$; б) $-\frac{5}{4}$; $\frac{4}{5}$. **14.** а) -1; б) 1. **15.** а) 4; б) 3. **16.** а) 0; б) 0. **17.** а) $-1{,}5$;

-1; б) 3. **18.** а) -2; б) 2. **19.** а) 3; б) 27. **20.** а) 8; б) 16. **21.** а) 3; б) 6. **22.** а) -9; б) -2. **23.** а) -2; б) 2. **24.** а) -1; б) -7. **25.** а) -2; б) -6.

Тренировочная работа 6

1. -19. **2.** 1. **3.** -2. **4.** -1. **5.** 2. **6.** 14. **7.** -2. **8.** 6. **9.** 1. **10.** $\frac{\pi}{2}k$, $k\in\mathbb{Z}$. **11.** ±1; $\pm\sqrt{2}$. **12.** 0; 0,25.

Логарифмические уравнения

1. а) 1,5; б) $\frac{2}{3}$. **2.** а) -19; 19; б) -16; 16. **3.** а) $\frac{1}{17}$; 17; б) $\frac{1}{25}$; 25. **4.** а) -3; 3; б) -9; 9. **5.** а) -4; б) 7. **6.** а) 23; б) 13. **7.** а) 4; б) -2. **8.** а) 7; 49; б) $\frac{1}{16}$; $\frac{1}{8}$. **9.** а) $\frac{1}{2}$; $\frac{65}{4}$; б) $\frac{6}{7}$; $\frac{54}{7}$. **10.** а) 9; б) 4. **11.** а) -6; б) 9. **12.** а) нет решений; б) -8; -5. **13.** а) -6; -2; б) 9. **14.** а) 8; б) 0. **15.** а) -11; б) 11. **16.** а) 6; б) 9. **17.** а) -6; б) 6. **18.** а) -2; 0; б) -4; 0. **19.** а) 1; 1,5; б) 2; 2,5. **20.** а) -3; б) -5. **21.** а) -3; -1; б) -2; -1. **22.** а) 0; б) 8. **23.** а) -26; 24; б) -14; 18. **24.** а) -3; б) -5. **25.** а) -6; б) -2.

Тренировочная работа 7

1. -4. **2.** Решений нет. **3.** 7. **4.** ±15. **5.** 1; $\frac{29}{5}$. **6.** 16. **7.** 4. **8.** -26; 24. **9.** 2; $\frac{5}{2}$. **10.** -5. **11.** 3. **12.** 1.

Системы целых алгебраических уравнений

1. а) $(6;6)$; б) $(21;21)$. **2.** а) $(16;0)$; б) $(54;0)$. **3.** а) $(-1;1)$; $(1;1)$; б) $(-1;1)$; $(1;1)$. **4.** а) $(0;0)$; $\left(\frac{1}{7};\frac{1}{7}\right)$; б) $(0;0)$; $\left(-\frac{1}{5};-\frac{1}{5}\right)$. **5.** а) $(1;-1)$; $(-1;-3{,}5)$; б) $(3;-2)$; $\left(-3;\frac{10}{3}\right)$. **6.** а) $\left(-\frac{5}{3};\frac{31}{9}\right)$; $(2;1)$; б) $\left(\frac{6}{5};-\frac{58}{25}\right)$; $(-1;-1)$. **7.** а) $(0;0)$; б) $(0;0)$. **8.** а) $\left(1;\frac{25}{7}\right)$; $\left(-1;\frac{1}{7}\right)$; б) $\left(-\frac{25}{81};\frac{25}{81}\right)$; $(0;0)$; $(1;1)$. **9.** а) $\left(\frac{2}{3};0\right)$; $(1;1)$; б) $\left(-\frac{5}{6};0\right)$; $(1;1)$. **10.** а) $(-1;-1)$; б) $(15;5)$. **11.** а) $(-3;2)$; $(3;2)$; б) $(-1;4)$; $(1;4)$. **12.** а) $(-1;-3)$; $(4;-3)$; б) $(-1;7)$; $(9;7)$. **13.** а) $(21;-3{,}5)$; б) $(3;-1)$. **14.** а) $(1;1)$; $(2;2)$; б) $(2;2)$; $(3;3)$. **15.** а) $(-1;-1)$; $(1;1)$; $(-0{,}5;-2)$; $(0{,}5;2)$; б) $(-1;-1)$; $(1;1)$; $\left(-7;-\frac{1}{7}\right)$; $\left(7;\frac{1}{7}\right)$. **16.** а) $(-6;-6)$; $(6;6)$; б) $(-8;-8)$; $(8;8)$. **17.** а) $\left(-1;\frac{2}{3}\right)$; $\left(1;-\frac{2}{3}\right)$; б) $\left(-1;\frac{3}{2}\right)$; $\left(1;-\frac{3}{2}\right)$. **18.** а) $(-3;-2)$; $(-2;-3)$; $(2;3)$; $(3;2)$; б) $(-2;1)$; $(-1;2)$; $(1;2)$; $(2;-1)$. **19.** а) $(6;4)$; $(4;6)$; б) $(6;-4)$; $(-4;6)$. **20.** а) $(-8;-4)$; $(2;1)$; б) $(-5;-1)$; $(20;4)$. **21.** а) $(-8;1)$; $(2;1)$; б) $(-4;1)$; $(2;1)$. **22.** а) $(2;-1)$; $(2;1)$; б) $(3;-1)$; $(3;1)$. **23.** а) $(4;2)$; б) $(-2;4)$. **24.** а) $(-9;-2)$; б) $(16;5)$. **25.** а) $(6;0{,}5)$; б) $\left(3;-\frac{4}{7}\right)$.

Тренировочная работа 8

1. $(2;-1)$. **2.** $(-1;1;3)$. **3.** $(0;0)$; $(-4;2)$. **4.** $(-2;3)$; $(3;-2)$. **5.** $(1+\sqrt{3};1-\sqrt{3})$; $(1-\sqrt{3};1+\sqrt{3})$. **6.** $(2;1)$; $(-2;-1)$; $\left(\frac{5\sqrt{3}}{3};-\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$; $\left(-\frac{5\sqrt{3}}{3};\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$. **7.** $(1;2)$; $(2;1)$. **8.** $(1;-1)$; $(-1;1)$. **9.** $(1;-3)$; $(-3;1)$; $(1;2)$; $(2;1)$. **10.** $(1;1)$; $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$; $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$; $(-2;2)$. **11.** $\left(\frac{3}{4};\frac{5}{4}\right)$; $\left(\frac{1}{4};\frac{7}{4}\right)$. **12.** $(1;-1)$; $\left(-\frac{11}{19};\frac{23}{19}\right)$.

Системы, содержащие дробно-рациональные уравнения

1. а) $\left(\frac{81}{11};-\frac{3}{11}\right)$; б) $\left(-\frac{6}{7};-\frac{1}{7}\right)$. **2.** а) $(4;4)$; б) $(3;3)$. **3.** а) $(6;5)$; б) $(2;-3)$. **4.** а) $\left(2;-\frac{5}{4}\right)$; б) $\left(-1;\frac{7}{2}\right)$. **5.** а) $(2;1)$; б) $(-2;1)$. **6.** а) $(9;8)$; б) $(8;-8)$. **7.** а) $\left(-\frac{5}{4};-\frac{5}{4}\right)$; $(5;5)$; б) $\left(-\frac{2}{5};-\frac{2}{5}\right)$; $(-3;-3)$. **8.** а) $(3;-3)$; б) $(-1;1)$. **9.** а) $(-4;4)$; $(4;-4)$; б) $(-3;3)$; $(3;-3)$. **10.** а) $\left(-\frac{9}{4};\frac{3}{16}\right)$; $(1;1)$; б) $\left(-\frac{57}{8};\frac{7}{64}\right)$; $(11;1)$. **11.** а) $(2;-1)$; б) $(-2;-0{,}8)$; $(4;0{,}8)$. **12.** а) $(-3;-3)$; б) $(-1;-1)$. **13.** а) $(8;-7)$; б) $(-0{,}75;-7)$. **14.** а) $(-2;4)$; $(2;-4)$; б) $(-5;-15)$; $(5;15)$. **15.** а) $(0;-3)$; $(16;0{,}2)$; б) $(0;5)$; $(26;-0{,}2)$. **16.** а) $(-12;2)$; б) $(5;1)$. **17.** а) $(7;-2)$; б) $(9;10)$. **18.** а) $(45;3)$; б) $(24;-2)$. **19.** а) $(-4;1)$; б) $(4;-4)$. **20.** а) $(-1;-1)$; б) $(-3;4)$. **21.** а) $(-3;-8)$; $(-2;-3)$; $(3;-8)$; б) $(-5;7)$; $(5;7)$; $(6;-4)$. **22.** а) $(2;-6)$; $(2;1)$; б) $(1;-5)$; $(1;1)$. **23.** а) $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right)$; $\left(\frac{1}{3};-\frac{1}{2}\right)$; б) $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{3}\right)$; $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{4}\right)$. **24.** а) $(1;2)$; $(2;4)$; б) $(-2;3)$; $(1;-1{,}5)$. **25.** а) $(-6;2)$; б) $(-6;-3)$.

Тренировочная работа 9

1. $(5;6)$. **2.** $(1;1)$. **3.** $(4;7)$. **4.** $(14;7)$. **5.** $(-19;-10)$. **6.** $(-2;1)$. **7.** $\left(2;\frac{5}{2}\right)$. **8.** $(4;6)$; $(-4;6)$; $(-5;-3)$. **9.** $(3;1)$; $(3;6)$. **10.** $(-2;-4)$; $(-2;-2)$; $(2;4)$. **11.** $(-7;-35)$. **12.** $(-6;-11)$.

Системы, содержащие иррациональные уравнения

1. а) $(2{,}25;1)$; б) $\left(\frac{16}{25};1\right)$. **2.** а) $(9;4)$; б) $(-6;4)$. **3.** а) $(5;9)$; б) $(4;1{,}5)$. **4.** а) $\left(-4;\frac{16}{9}\right)$; б) $(-2;25)$. **5.** а) $(-7;3)$; $(14;-6)$; б) $(-5;-2)$; $(15;6)$. **6.** а) $(25;5)$; $(49;-2)$; б) $(16;-3)$; $(36;4)$. **7.** а) $(-9;-4)$; $(9;4)$; б) $(-9;-25)$; $(9;25)$. **8.** а) $(-3;36)$; б) $(6;25)$. **9.** а) $(-2;9)$; б) $(-6;49)$. **10.** а) $(-9;-9)$; $(3;27)$; б) $(-4;-4)$; $(10;1{,}6)$. **11.** а) $(7;2)$; б) $(9;4)$. **12.** а) $(6;5)$; б) $(3;-1)$. **13.** а) $(-1;1)$; $(3;9)$; б) $(-2;10)$; $(4;7)$. **14.** а) $(4;\sqrt{3})$; б) $(4;\sqrt{13})$. **15.** а) $(-2;2)$; б) $(6;4)$. **16.** а) $(3;6)$; б) $(-3;5)$. **17.** а) $(-4;7)$; $(4;5)$; б) $(-6;3)$; $(6;1)$. **18.** а) $(4;9)$; б) $(9;1)$. **19.** а) $(-10;-7)$; б) $(-7;-5)$. **20.** а) $(4;1)$; б) $(4;9)$. **21.** а) $(4t;t)$, где $t\leqslant 0$; б) $(0;0)$. **22.** а) $(20;-4)$;

б) $(14; 2)$. **23.** а) $(1; 1)$; б) $(1; 1)$. **24.** а) $(3; 27)$; б) $(2; 18)$. **25.** а) $\left(-\frac{4}{3}; -\frac{4}{3}\right)$; $(1; 1)$; б) $(1; 1)$.

Тренировочная работа 10

1. $(2; 6)$. **2.** $(-1; 0)$. **3.** $(5; 4)$. **4.** $(9; 2)$; $(25; -1)$. **5.** $(9; 6)$; $(-3; -2)$. **6.** $(2; 3)$. **7.** $(-9; -4)$; $\left(10; \frac{18}{5}\right)$. **8.** $\left(3; \frac{3}{2}\right)$. **9.** $(6; 2)$. **10.** $(5; 2)$. **11.** $\left(3; \frac{3}{2}\right)$. **12.** Решений нет.

Системы, содержащие тригонометрические уравнения

1. а) $\left(\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n; 1\right)$; б) $\left((-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n; -1\right)$. **2.** а) $\left(\pi + 2\pi n; \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k\right)$; б) $\left(\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; 2\pi k\right)$. **3.** а) $\left(-\frac{\pi}{4} + \pi n; -1\right)$; б) $\left(-\frac{\pi}{4} + \pi n; 3\right)$. **4.** а) $\left(\frac{\pi}{4} + \right.$ $\left. + \pi n; \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k\right)$; б) $\left(\frac{\pi}{4} + \pi n; (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k\right)$. **5.** а) $\left(\frac{7\pi}{2}; \frac{\pi}{14} + \frac{\pi n}{7}\right)$; б) $\left(\frac{\pi n}{3}; -7\pi\right)$. **6.** а) $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; 2\pi k\right)$; б) $\left(\pi + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$. **7.** а) $\left(-9; \right.$ $\left. -\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$; б) $\left(-19; -\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$. **8.** а) $\left(\frac{\pi(2k+n+1)}{6}; \frac{\pi(n-2k-1)}{4}\right)$; б) $\left(\frac{\pi(2k+n+1)}{8}; \frac{\pi(2k-n+1)}{10}\right)$. **9.** а) $\left(\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$; б) $\left(\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$. **10.** а) $\left(\frac{13\pi}{6}; \frac{\pi n}{2}\right)$; б) $\left(\frac{7\pi}{8}; \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}\right)$. **11.** а) $\left(2; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$; б) $(-4; \pi + 2\pi n)$. **12.** а) $(4; -1 + 4n)$; $(2k; -5)$; б) $(3; 1 + 4n)$; $(1 + 2k; -11)$. **13.** а) $\left(\frac{3\pi}{4} + 3\pi n; \right.$ $\left. \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$; $\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi k}{2}; -\frac{\pi}{3} - \frac{4\pi k}{3}\right)$; б) $\left(\frac{7\pi}{20} + \frac{7\pi n}{5}; \frac{7\pi}{16} + \frac{7\pi n}{4}\right)$; $\left(\frac{9\pi}{20} + \frac{9\pi k}{5}; \right.$ $\left. -\frac{9\pi}{16} - \frac{9\pi k}{4}\right)$. **14.** а) $(-1; \pi n)$; б) $\left(-9; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$. **15.** а) $\left(\pi + 2\pi n; -\frac{7}{5}\right)$; б) $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; 2\right)$. **16.** а) $\left(\frac{\pi}{2} + \pi n; 2\right)$; б) $(\pi n; 3)$. **17.** а) $(\pi; 2\pi)$; б) $(\pi; -\pi)$. **18.** а) $\left(\pi + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$; б) $(\pi + 2\pi n; 2\pi k)$. **19.** а) $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$; б) $(2\pi n; \pi + 2\pi k)$. **20.** а) $(1; 2\pi n)$; б) $\left(3; -\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$. **21.** а) $\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi n; 1\right)$; $(2\pi k; 2)$; б) $(\pi + 2\pi n; 5)$; $\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi k; 4\right)$. **22.** а) $\left(3; \frac{\pi}{4} + \pi n\right)$; б) $\left(3; \frac{2\pi n}{7}\right)$. **23.** а) $\left(-10; \frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3}\right)$; $\left(10; -\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi k}{3}\right)$; б) $\left(\sqrt{2}; \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi n}{5}\right)$; $\left(-\sqrt{2}; \frac{\pi}{4} + \right.$ $\left. + \frac{2\pi k}{5}\right)$. **24.** а) $\left(\sqrt{3}; \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right)$; $\left(-\sqrt{3}; -\frac{\pi}{3} + 2\pi k\right)$; б) $\left(4\sqrt{3}; \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right)$; $\left(-4\sqrt{3}; -\frac{\pi}{6} + 2\pi k\right)$. **25.** а) $\left(-\frac{\pi}{4} + \pi n; 3\right)$; $\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi n; \frac{9}{2}\right)$; б) $\left(-\frac{\pi}{4} + \pi n; \right.$ $\left. -4\right)$; $\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi n; -\frac{5}{2}\right)$.

Тренировочная работа 11

1. $\left((-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n; 2\right)$, $n \in \mathbb{Z}$. **2.** $\left(-1; (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$. **3.** $\left(\frac{\pi}{4} + \pi n; 2\right)$, $n \in \mathbb{Z}$. **4.** $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; 2\pi k\right)$, $n, k \in \mathbb{Z}$. **5.** $\left(-13; -\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$. **6.** $(-1; \pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$. **7.** $\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{5}{3}\right)$; $\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi k; -\frac{5}{3}\right)$, $n, k \in \mathbb{Z}$. **8.** $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; 6\right)$;

$(\pi+2\pi k;5)$, $n,k\in\mathbb{Z}$. **9.** $\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi n;1\right)$; $\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi k;-1\right)$, $n,k\in\mathbb{Z}$. **10.** $\left(-4\sqrt{2};-\frac{\pi}{20}+\frac{2\pi n}{5}\right)$; $\left(4\sqrt{2};\frac{3\pi}{20}+\frac{2\pi k}{5}\right)$, $n,k\in\mathbb{Z}$. **11.** $\left(\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi n;2\right)$; $(\pi k;\pi l)$; $(t;0)$, $t\neq\frac{\pi}{2}+\pi m$, $n,k,m,l\in\mathbb{Z}$, $l\neq0$. **12.** $(0;t)$, $t\neq\pi n$; $\left(\pi l;\frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $n,l,k\in\mathbb{Z}$, $l\neq0$.

Системы, содержащие показательные уравнения

1. а) $(1;1)$; б) $(1;1)$. **2.** а) $(3;2)$; б) $(5;3)$. **3.** а) $(5;5)$; б) $(-7;10)$. **4.** а) $(5;1)$; б) $(-4;1)$. **5.** а) $(-4;\log_5 134)$; $(5;3)$; б) $(-4;\log_6 21)$; $(1;2)$. **6.** а) $(\log_3 8;\log_2 9)$; $(2;3)$; б) $(\log_5 8;\log_2 25)$; $(2;3)$. **7.** а) $(2;2)$; б) $(2;3)$. **8.** а) $(\log_5 64;\log_8 25)$; $(2;1)$; б) $(\log_4 3-1;3\log_3 4+3)$; $(2;4)$. **9.** а) $(-1;-3)$; б) $(-2;-1)$. **10.** а) $(3;1)$; б) $(4;1)$. **11.** а) $(1;3)$; б) $(1;5)$. **12.** а) $(-7;5)$; б) $(-9;8)$. **13.** а) $\left(1;\frac{7}{6}\right)$; б) $\left(1;\frac{2}{7}\right)$. **14.** а) $(1;1)$; б) $(1;2)$. **15.** а) $(-5;0)$; б) $(6;-0)$. **16.** а) $(2;9)$; $(6;5)$; б) $(-7;-4)$; $(7;-18)$. **17.** а) $(4;1)$; б) $(16;1)$. **18.** а) $(1;-5)$; $(1;5)$; б) $(1;-2)$; $(1;2)$. **19.** а) $(-6;-1)$; $(-6;1)$; б) $(-4;-1)$; $(-4;1)$. **20.** а) $(4;-2)$; $(4;2)$; б) $(1;-1)$; $(1;1)$. **21.** а) $(2;1)$; б) $(1;2)$. **22.** а) $(1;3)$; б) $(1;2)$. **23.** а) $(3;2)$; б) $(3;6)$. **24.** а) $(19;1)$; б) $(14;1)$. **25.** а) $\left(-1;-\frac{2}{15}\right)$; б) $\left(-1;\frac{4}{7}\right)$.

Тренировочная работа 12

1. $(1;3)$. **2.** $(2;1)$; $(\log_2 7;2\log_7 2)$. **3.** $(1;2)$. **4.** $(12;13)$. **5.** $(1;5)$; $(1;-5)$. **6.** $(-16;0)$; $\left(-1;\frac{5}{21}\right)$. **7.** $(2;1)$. **8.** $(3;\log_5 10)$. **9.** $(-2;3)$; $(\log_7 81-2;-1)$. **10.** $\left(\log_5\frac{5}{4};\frac{8}{5}\right)$. **11.** $(2;1)$; $(-8;-4)$. **12.** $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$; $(4;2)$; $(-6;-3)$.

Системы, содержащие логарифмические уравнения

1. а) $(-2;10)$; б) $(-4;49)$. **2.** а) $(5;6)$; б) $(15;16)$. **3.** а) $(0{,}04;3)$; б) $\left(\frac{1}{64};4\right)$. **4.** а) $(-49;-1)$; $(-1;-49)$; б) $(-16;-1)$; $(-1;-16)$. **5.** а) $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{49}\right)$; $(9;7)$ б) $\left(5;\frac{1}{4}\right)$; $(25;\frac{1}{32})$. **6.** а) $(5;1)$; б) $\left(\frac{1}{6};-1\right)$. **7.** а) $(\sqrt{26};-1)$; б) $(5;-1)$. **8.** а) $(-25;8)$; $(\sqrt[8]{5};-0{,}5)$; б) $(\sqrt[3]{9};5)$; $(\sqrt[5]{3};1{,}5)$. **9.** а) нет решений; б) $(2;1)$. **10.** а) $\left(\frac{1}{\sqrt{27}};1\right)$; $(3;6)$; б) $(0{,}5;-4)$; $(\sqrt[3]{4};1)$. **11.** а) $(9;2)$; б) $(4;4)$. **12.** а) $(4;8)$; $(8;4)$; б) $(2;3)$; $(3;2)$. **13.** а) $(2;2)$; б) $(4;16)$. **14.** а) $(-1;-9)$; б) $(-2;-9)$. **15.** а) $(1;3)$; б) $(5;4)$. **16.** а) $(9;2)$; б) $(2;8)$. **17.** а) $(3;2)$; б) $(7;5)$. **18.** а) $(5;49)$; $(25;7)$; б) $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}};3\right)$; $\left(2;\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)$. **19.** а) $(3;6)$; б) $\left(\frac{11}{2};\frac{5}{2}\right)$. **20.** а) $\left(\frac{1}{27};1\right)$; $(27;7)$; б) $\left(\frac{1}{64};-9\right)$; $(64;3)$. **21.** а) $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{8}\right)$; б) $(1;1)$. **22.** а) $(9;28)$; б) $(8;21)$. **23.** а) $(4;7)$; б) $(6;10)$. **24.** а) $(6;4)$; б) $(5;14)$. **25.** а) $\left(0;-\frac{5}{3}\right)$; б) $\left(0;\frac{4}{7}\right)$.

Тренировочная работа 13

1. $(5;9)$. **2.** $(-3;9)$. **3.** $(2;2\sqrt{2})$. **4.** $\left(3;\frac{9}{5}\right)$. **5.** $(8;4)$. **6.** $(3;1)$. **7.** $(7;5)$; $(5;7)$. **8.** $(7{,}5;4{,}5)$. **9.** $\left(3;-\frac{2}{\log_3 2}\right)$. **10.** $(1;\sqrt{3})$; $(3;3)$. **11.** $(6;8)$. **12.** $(5;7)$.

Диагностическая работа 1

1. $(2;1)$; $\left(-\frac{5}{3};\frac{31}{9}\right)$. **2.** $(-1;-3)$; $(4;-3)$. **3.** $(-5;-6)$. **4.** $(-1;-1)$. **5.** $\left(\frac{9}{4};1\right)$. **6.** $(5;9)$. **7.** $\left(\frac{7\pi}{2};\frac{\pi}{14}+\frac{\pi n}{7}\right)$, $n\in\mathbb{Z}$. **8.** $\left(-13;-\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$, $n\in\mathbb{Z}$. **9.** $(-5;0)$. **10.** $(4;1)$. **11.** $(27;7)$; $\left(\frac{1}{27};1\right)$. **12.** $(1;-1)$.

Диагностическая работа 2

1. $(\sqrt{6}+2\sqrt{3};2\sqrt{3}-\sqrt{6})$, $(-\sqrt{6}-2\sqrt{3};\sqrt{6}-2\sqrt{3})$; $(2\sqrt{3}-\sqrt{6};\sqrt{6}+2\sqrt{3})$, $(\sqrt{6}-2\sqrt{3};-\sqrt{6}-2\sqrt{3})$. **2.** $(4;2)$. **3.** $(-4;4)$; $(4;-4)$. **4.** $(-3;-3)$. **5.** $(9;6)$; $(-3;-2)$. **6.** $(3;27)$. **7.** $\left(\frac{13\pi}{16};\frac{\pi k}{2}\right)$, $k\in\mathbb{Z}$. **8.** $\left(2;2\pi k+\frac{\pi}{2}\right)$, $k\in\mathbb{Z}$. **9.** $(-5;0)$. **10.** $(3;2)$. **11.** $(4;7)$. **12.** $(9;28)$.

Диагностическая работа 3

1. $(-9;-2)$. **2.** $(-1;-1)$. **3.** $(4;-7)$. **4.** $(0;-3)$. **5.** $(1;1)$; $\left(-\frac{4}{3};-\frac{4}{3}\right)$. **6.** $(-10;-7)$. **7.** $(4;3+4k)$; $(2n;-5)$, $n,k\in\mathbb{Z}$. **8.** $(-1;\pi k)$, $k\in\mathbb{Z}$. **9.** $(12;13)$. **10.** $(-16;0)$; $\left(-1;\frac{5}{21}\right)$. **11.** Решений нет. **12.** $\left(0;-\frac{5}{3}\right)$.

Диагностическая работа 4

1. $(6;6)$. **2.** $\left(\frac{2}{3};0\right)$; $(1;1)$. **3.** $(-9;-2)$. **4.** $(4;4)$. **5.** $(45;3)$. **6.** $(-1;1)$. **7.** $\left(\frac{3}{2};1\right)$. **8.** $\left(\pi n,\frac{\pi}{2}+\pi k\right)$; $\left(\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi l,2\right)$, $n,k,l\in\mathbb{Z}$. **9.** Нет решений. **10.** $\left(-\frac{3\pi}{4}+2\pi k;3\sqrt[4]{2}\right)$, $k\in\mathbb{Z}$. **11.** $\left(-\arccos\frac{1}{6}+2\pi k;1\right)$; $\left(\pm\arccos\frac{1}{6}+2\pi k;-2\right)$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.** $(2\pi k;1)$, $k\in\mathbb{Z}$.

Диагностическая работа 5

1. $\left(\frac{80}{9};\frac{80}{9}\right)$. **2.** $(2;1)$; $\left(-1\frac{2}{3};3\frac{4}{9}\right)$. **3.** $(-8;1)$; $(2;1)$. **4.** $(6;5)$. **5.** $(4;7)$. **6.** $(36;4)$. **7.** $\left((-1)^{n+1}\arcsin\frac{3}{11}+\pi n;\frac{1}{11}\right)$, $n\in\mathbb{Z}$. **8.** $(-1;2)$. **9.** $(2;4)$. **10.** $\left(3;\frac{1-2\cos 3}{6}\right)$. **11.** $\left(\frac{1}{2};\frac{\pi}{6}+2\pi k\right)$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.** $(-2;-1)$; $\left(-\pi;\frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n\in\mathbb{Z}$.

Содержание

Шестаков Сергей Алексеевич
Захаров Пётр Игоревич

ЕГЭ 2011. Математика. Задача C1.

Под редакцией А. Л. Семенова и И. В. Ященко

Подписано в печать 4.08.2010 г. Формат 60 × 90 1/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Печ. л. 10. Тираж 20 000 экз. Заказ № 1008350.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (499) 241–74–83

Отпечатано в полном соответствии с качеством
предоставленного электронного оригинал-макета
в ОАО «Ярославский полиграфкомбинат»
150049, Ярославль, ул. Свободы, 97

ЕГЭ 2011

Математика

ISBN 978-5-94057-663-1

9 785940 576631 >