МАТЕМАТИКА ЕГЭ 2010

Задания С4

Корянов А. Г. *г. Брянск*

Замечания и пожелания направляйте по адресу:
akoryanov@mail.ru

Многовариантные задачи по планиметрии

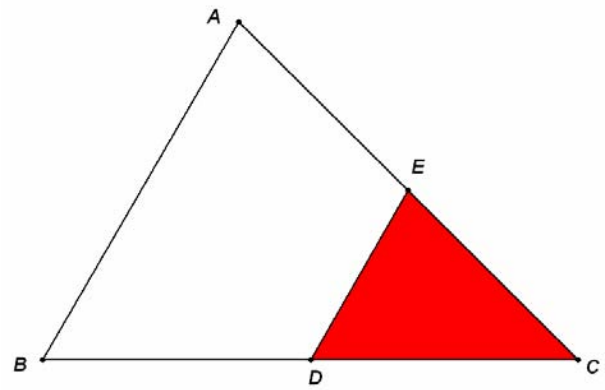
1. Взаимное расположение элементов фигуры:
   а) выбор линейного элемента;
   б) выбор углового элемента;
   в) выбор отношения отрезков, площадей фигур.
2. Взаимное расположение двух фигур:
   а) точки и прямой (расположение точки на прямой или в одной из полуплоскостей);
   б) точки и двух параллельных прямых;
   в) точки и отрезка, лежащих на одной прямой (или трех точек, лежащих на одной прямой);
   г) точки и окружности;
   д) точки и многоугольника;
   е) вписанный угол, опирающийся на хорду (вид угла – острый, прямой или тупой);
   ж) треугольник, вписанный в окружность (расположение центра окружности относительно треугольника);
   з) трапеция, вписанная в окружность (расположение центра окружности относительно трапеции);
   и) касающиеся окружности (внутреннее или внешнее касание);
   к) непересекающиеся окружности и касательные (внутренние или внешние);
   л) пересекающиеся окружности (расположение центров окружностей относительно их общей хорды)

Выбор средней линии треугольника

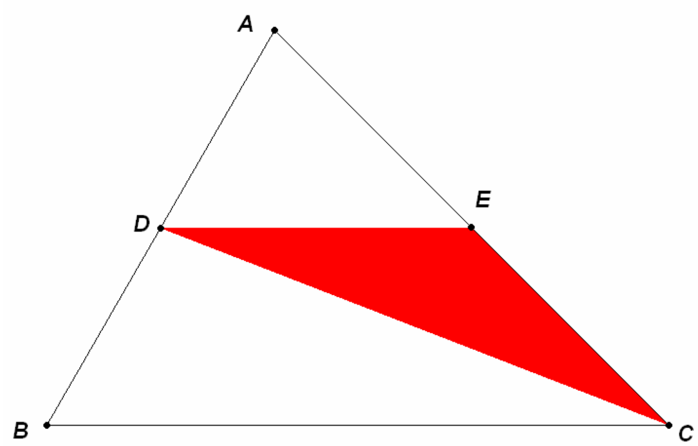
Пример 1. Площадь треугольника ABC равна 4. DE — средняя линия. Найдите площадь треугольника CDE.

● *Прямая, параллельная стороне треугольника, отсекает от него треугольник, подобный данному.*
● *Медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника.*

Решение. 1) Отрезок DE параллелен отрезку AB. Треугольники EDC и ABC подобны. Тогда $S_{EDC} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot S_{ABC} = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1.$



2) Отрезок DE параллелен отрезку BC. Так как CD – медиана треугольника ABC, то $S_{ADC} = \frac{1}{2} S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2.$ DE – медиана треугольника ADC, поэтому $S_{CDE} = \frac{1}{2} S_{ADC} = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1.$



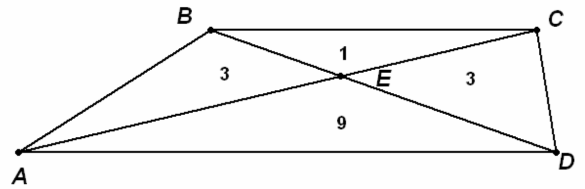
3) Отрезок DE параллелен отрезку AC (рассмотрите самостоятельно).
Ответ: 1.

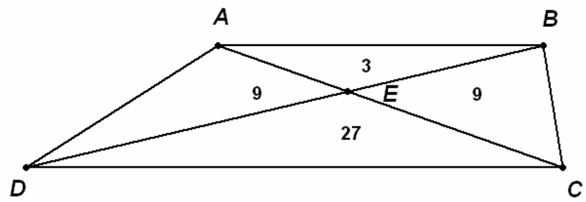
Выбор оснований трапеции

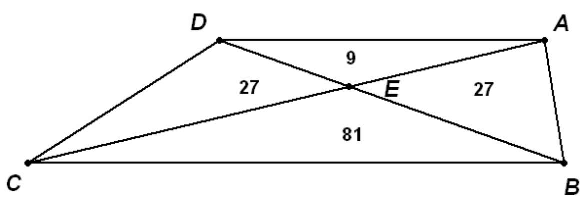
Пример 2. (2010) Диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке E. Найдите площадь трапеции, если площадь треугольника AED равна 9, а точка E делит одну из диагоналей в отношении 1:3.

● *Трапеция разбивается диагоналями на два равновеликих треугольника (примыкающих к боковым сторонам) и два подобных треугольника (примыкающих к основаниям).* (докажите)
● *Если у двух треугольников равны высоты, то их площади относятся как основания.* (докажите)

Решение. Пусть точка E делит диагональ в отношении 1:3, считая от вершины верхнего основания.
1) Рассмотрим трапецию с основаниями BC и AD. Треугольники AED и CEB подобны (по двум углам), причем коэффициент подобия равен $k = \dfrac{AE}{EC} = 3$.
Значит, $S_{AED} = 3^2 \cdot S_{BEC} = 9 \cdot 1 = 9$. Треугольники ABE и BEC имеют общую высоту, поэтому $\dfrac{S_{ABE}}{S_{BEC}} = \dfrac{AE}{EC} = 3$ и $S_{ABE} = 3 \cdot 1 = 3$. Аналогично $S_{DEC} = 3 \cdot 1 = 3$. Искомая площадь равна $S_{ABCD} = 1 + 3 + 3 + 9 = 16$.
Остальные случаи выбора оснований трапеции рассмотрите самостоятельно.







Замечание. В задаче кроме неопределенности в выборе оснований трапеции имеется неопределенность в выборе отношения. Рассмотрите самостоятельно случаи, когда точка E делит диагональ в отношении 1:3, считая от вершины нижнего основания. Как это отразится на рисунке?
Ответ: 16; 48; 144.

Выбор отношения отрезков, площадей

Пример 3. (2010) Основания трапеции равны a и b. Прямая, параллельная основаниям, разбивает трапецию на две трапеции, площади которых относятся как 2:3. Найдите длину отрезка этой прямой, заключенного внутри трапеции.
Первое решение. Обозначим искомый отрезок EF через x.
1) Пусть площади трапеций $DCFE$ и $ABFE$ относятся как 2:3.

$$\frac{S_{DCFE}}{S_{ABFE}} = \frac{\frac{b+x}{2} \cdot h_1}{\frac{a+x}{2} \cdot h_2} = \frac{2}{3}.$$ Отсюда

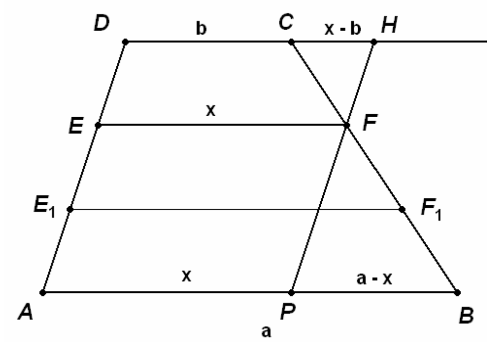
$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{2(a+x)}{3(b+x)}. \quad (*)$$

h_1 и h_2 - высоты этих трапеций.
Через точку F проведем отрезок PH параллельно AD. Тогда треугольники PBF и HCF подобны (докажите) и $\dfrac{CH}{BP} = \dfrac{h_1}{h_2}$, $\dfrac{x-b}{a-x} = \dfrac{h_1}{h_2}$.
Используем соотношение (*):

$$\frac{x-b}{a-x} = \frac{2(a+x)}{3(b+x)}.$$

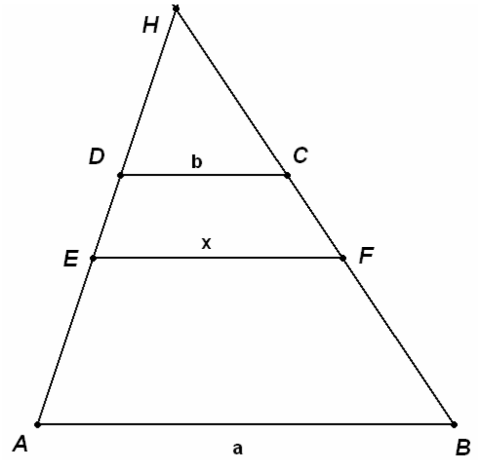
Решая полученное уравнение относительно переменной x, получаем $3(x^2 - b^2) = 2(a^2 - x^2)$,

$5x^2 = 2a^2 + 3b^2$, $x = \sqrt{\dfrac{2a^2 + 3b^2}{5}}$.



Второе решение. Обозначим $S_{DCFE} = S_1$, $S_{ABFE} = S_2$, тогда $S_2 = 1{,}5 S_1$.

Достроим трапецию *ABCD* до треугольника *ABH* и обозначим $S_{DCH} = S$.



Так как треугольники ABH и DCH подобны (докажите), то имеем $\dfrac{S_{ABH}}{S_{DCH}} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^2$,

или $\dfrac{S+S_1+S_2}{S} = \dfrac{a^2}{b^2}$. (*)

Так как треугольники EFH и DCH подобны (докажите), то имеем $\dfrac{S_{EFH}}{S_{DCH}} = \left(\dfrac{x}{b}\right)^2$,

или $\dfrac{S+S_1}{S} = \dfrac{x^2}{b^2}$. (**)

Из соотношений (*) и (**) имеем

$1+\dfrac{S_1+S_2}{S} = \dfrac{a^2}{b^2}$ и $1+\dfrac{S_1}{S} = \dfrac{x^2}{b^2}$.

Далее $\dfrac{S_1+S_2}{S} = \dfrac{a^2-b^2}{b^2}$ и $\dfrac{S_1}{S} = \dfrac{x^2-b^2}{b^2}$.

Теперь разделим одно равенство на другое

$\dfrac{S_1+S_2}{S_1} = \dfrac{a^2-b^2}{x^2-b^2}$.

С учетом соотношения $S_2 = 1{,}5S_1$ получаем уравнение относительно переменной x:

$\dfrac{a^2-b^2}{x^2-b^2} = \dfrac{5}{2}$, откуда $x = \sqrt{\dfrac{2a^2+3b^2}{5}}$.

2) Случай, когда площади трапеций $ABFE$ и $DCFE$ относятся как 2:3, рассмотрите самостоятельно. В этом случае площади трапеций $DCFE$ и $ABFE$ относятся как 3:2.

Ответ: $\sqrt{\dfrac{2a^2+3b^2}{5}}$ или $\sqrt{\dfrac{3a^2+2b^2}{5}}$.

Выбор угла треугольника

Пример 4. Площадь треугольника равна 12. Две его стороны равны 6 и 8. Найдите угол между этими сторонами.

Решение. Используя формулу $S_\Delta = 0{,}5ab\sin\gamma$, получаем $\sin\gamma = 0{,}5$. Значит $\gamma = 30^\circ$ или $\gamma = 150^\circ$.

Ответ: 30° или 150°.

Пример 5. (2010) Треугольник ABC вписан в окружность радиуса 12. Известно, что $AB = 6$ и $BC = 4$. Найдите AC.

Первое решение. Используя обобщенную теорему синусов, найдем $\sin A = \dfrac{BC}{2R} = \dfrac{4}{2\cdot 12} = \dfrac{1}{6}$,

$\sin C = \dfrac{AB}{2R} = \dfrac{6}{2\cdot 12} = \dfrac{1}{4}$.

Так как $\angle B = 180^\circ - \angle A - \angle C$,

то $\sin\angle B = \sin(180^\circ - \angle A - \angle C) = \sin(\angle A + \angle C)$.

1) Если треугольник ABC – остроугольный, то

$\cos\angle A = \dfrac{\sqrt{35}}{6}$, $\cos\angle C = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$.

Воспользуемся формулой сложения

$$\sin(\angle A + \angle C) = \frac{1}{6}\cdot\frac{\sqrt{15}}{4} + \frac{\sqrt{35}}{6}\cdot\frac{1}{4} = \frac{\sqrt{35}+\sqrt{15}}{24}.$$

Далее находим искомую величину

$$AC = 2R\sin B = 24\cdot\frac{\sqrt{35}+\sqrt{15}}{24} = \sqrt{35}+\sqrt{15}.$$

2) Пусть угол C – тупой, тогда

$$\sin(\angle A + \angle C) = \frac{1}{6}\cdot\left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right) + \frac{\sqrt{35}}{6}\cdot\frac{1}{4} = \frac{\sqrt{35}-\sqrt{15}}{24}.$$

$AC = \sqrt{35} - \sqrt{15}$.

3) Случай, когда угол A – тупой, невозможен (почему?).

Второе решение. Используем теорему косинусов $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB\cdot BC\cos B$ и следствие из теоремы синусов $AC = 2R\sin B$. Отсюда получаем тригонометрическое уравнение $576\sin^2 B = 36 + 16 - 48\cos B$. Решая последнее уравнение, находим $\cos B = \dfrac{1 \pm 5\sqrt{21}}{24}$. Положительное значение косинуса соответствует острому углу B, отрицательное – тупому углу B. Зная значение $\sin B = \dfrac{\sqrt{50 \pm 10\sqrt{21}}}{24} = \dfrac{\sqrt{35}\pm\sqrt{15}}{24}$, находим $AC = \sqrt{35}\pm\sqrt{15}$.

Ответ: $\sqrt{35}\pm\sqrt{15}$.

Выбор угла параллелограмма

Пример 6. (2010) В параллелограмме $ABCD$ известны стороны $AB = a$, $BC = b$, и $\angle BAD = \alpha$. Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников BCD и DAB.

Решение. Диагональ BD разбивает параллелограмм на два равных треугольника BCD и DAB. Поэтому по разные стороны от прямой BD расположены центры O и Q описанных около них окружностей, лежащие на серединном перпендикуляре OQ к их общей стороне BD. Следовательно, $OQ = 2OM$, где M – середина BD.

1) Пусть $\alpha < 90^\circ$, тогда центр O лежит внутри треугольника DAB. Получаем $\angle BOD = 2\alpha$,

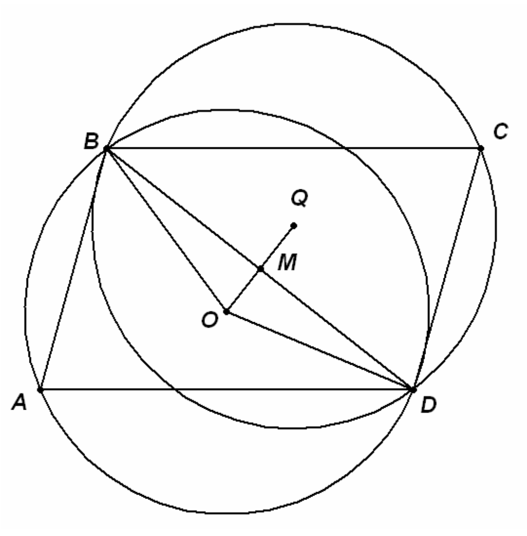
$\angle BOM = \frac{1}{2}\angle BOD = \alpha$. Из треугольника BOM находим $OM = BM \cdot ctg\alpha$. Тогда

$OQ = 2OM = 2BM \cdot ctg\alpha = BD \cdot ctg\alpha.$

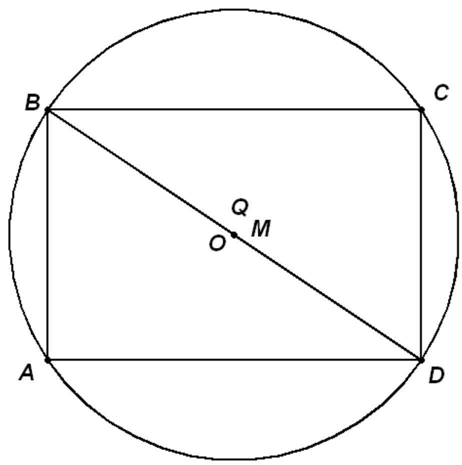
BD находим из треугольника DAB:

$BD = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}$.

Следовательно, $OQ = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha} \cdot ctg\alpha$.



2) Пусть $\alpha = 90^\circ$, тогда точки O и Q совпадают и $OQ = 0$.



3) Пусть $\alpha > 90^\circ$, тогда центр O лежит вне треугольника DAB. Получаем угол, опирающийся на большую дугу $\angle BOD = 2\alpha$, а в треугольнике BOD $\angle BOD = 360^\circ - 2\alpha$,

$\angle BOM = \frac{1}{2}\angle BOD = 180^\circ - \alpha$. Из треугольника BOM находим

$OM = BM \cdot ctg(180^\circ - \alpha) = BM \cdot (-ctg\alpha).$

Тогда

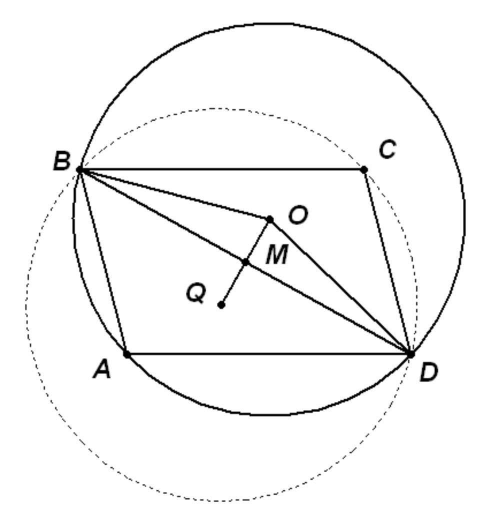
$OQ = 2OM = 2BM \cdot (-ctg\alpha) = BD \cdot (-ctg\alpha).$

BD находим из треугольника DAB:

$BD = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}$.

Следовательно,

$OQ = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha} \cdot (-ctg\alpha)$.



Ответ: $\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha} \cdot ctg\alpha$, если $0 < \alpha < 90^\circ$; 0, если $\alpha = 90^\circ$;

$\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha} \cdot (-ctg\alpha)$, если $90^\circ < \alpha < 180^\circ$;

в общем виде $\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha} \cdot |ctg\alpha|$.

Выбор угла трапеции

Пример 7. (2010) Дана трапеция $ABCD$ с боковыми сторонами $AB = 36$, $CD = 34$ и верхним основанием $BC = 10$. Известно, что $\cos\angle ABC = -\frac{1}{3}$. Найдите BD.

Решение. 1) Проведем CE параллельно AB. Тогда $ABCE$ – параллелограмм. $\angle AEC = \angle ABC$, $\angle DEC = 180^\circ - \angle AEC$, $\cos\angle DEC = \frac{1}{3}$ и $\cos\angle DAB = \frac{1}{3}$.
2) Обозначим ED через x. В треугольнике DEC используем теорему косинусов.

$$34^2 = 36^2 + x^2 - 2\cdot 36\cdot x\cdot\frac{1}{3},\ x^2 - 24x + 140 = 0.$$

Отсюда $x = 14$ или $x = 10$.
3) В треугольнике ABD используем теорему косинусов.
Если $x = 14$, то $AD = 24$.

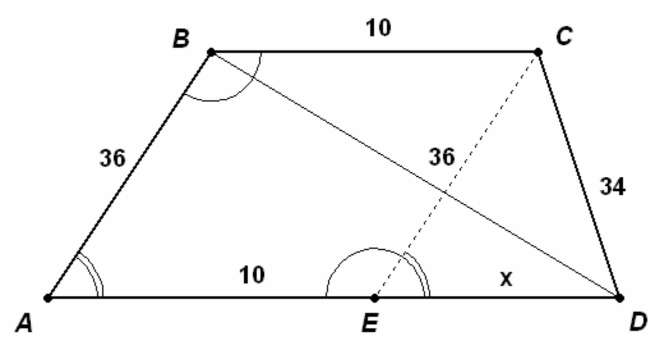
$$BD^2 = 36^2 + 24^2 - 2\cdot 36\cdot 24\cdot\frac{1}{3} = 1296;\ BD = 36.$$

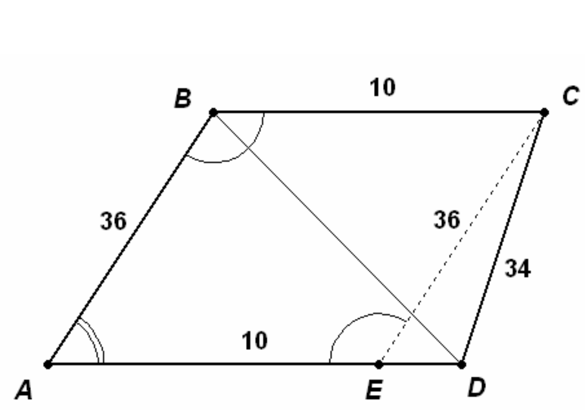
В этом случае угол D – острый. (докажите)
Если $x = 10$, то $AD = 20$.

$$BD^2 = 36^2 + 20^2 - 2\cdot 36\cdot 20\cdot\frac{1}{3} = 1216;$$

$$BD = 8\sqrt{19}.$$

В этом случае угол D – тупой. (докажите)





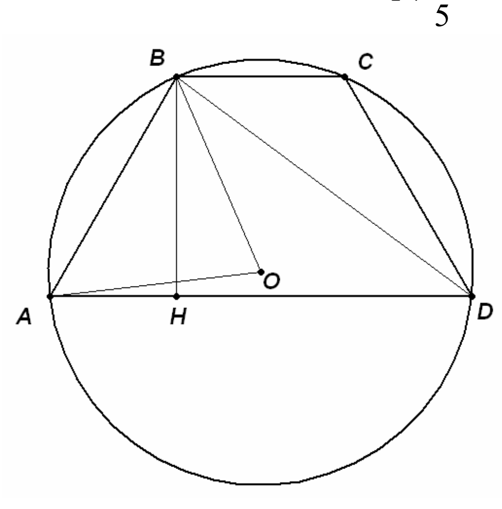
***Ответ*:** 36 или $8\sqrt{19}$.

Вид угла (острый, прямой, тупой)

Пример 8. (2010) Трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC вписана в окружность с центром O. Найдите высоту трапеции, если ее средняя линия равна 3 и $\sin\angle AOB = \frac{3}{5}$.

● *Проекция боковой стороны равнобедренной трапеции на большее основание равна полуразности оснований, а проекция диагонали — полусумме оснований (средней линии).* (докажите)
● *Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается.*

Решение. Пусть $\angle AOB = \alpha$. Проведем высоту BH и диагональ BD. Отрезок HD равен средней линии. Так как вписанный угол BDA в два раза меньше центрального угла AOB, то $\angle ADB = \frac{\alpha}{2}$. Из прямоугольного треугольника BHD найдем высоту $BH = HD\cdot tg\frac{\alpha}{2}$. Используем формулу тангенса половинного угла $tg\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$. Тогда $BH = \frac{3\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$.
1) Рассмотрим случай, когда $\angle AOB = \alpha$ – острый. Находим $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ и $BH = \frac{3\cdot\frac{3}{5}}{1+\frac{4}{5}} = 1$.



2) Второй случай, когда $\angle AOB = \alpha$ – тупой, рассмотрите самостоятельно.
3) Почему не рассматривается случай, когда $\angle AOB = 90^\circ$?
***Ответ*:** 9 или 1.

Взаимное расположение точки и отрезка, лежащие на одной прямой

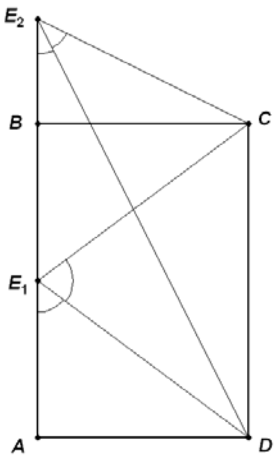
Пример 9. (2010) В прямоугольнике $ABCD$ $AB=2$, $BC=\sqrt{3}$. Точка E на прямой AB выбрана так, что $\angle AED=\angle DEC$. Найдите AE.

Решение. По свойству параллельных прямых $\angle AED=\angle EDC$. Следовательно, треугольник DEC равнобедренный, и $EC=CD=2$. Получим прямоугольный треугольник BEC с гипотенузой $EC=2$ и катетом $BC=\sqrt{3}$. По теореме Пифагора $BE=1$.

1) Если точка E лежит между A и B (точка E_1 на рисунке), то $AE=1$.

2) Если точка B лежит между A и E (точка E_2 на рисунке), то $AE=3$.

3) Случай, когда точка A лежит между B и E, невозможен (почему?).



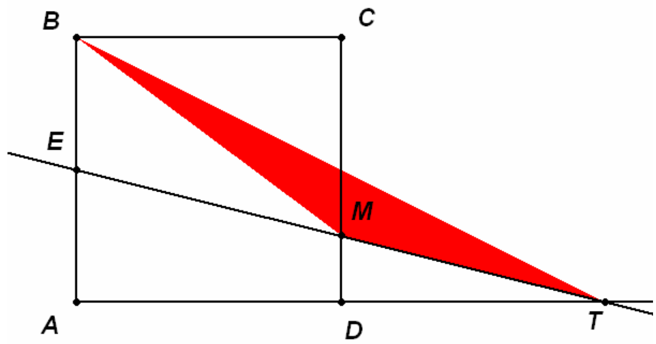
Ответ: 1 или 3.

Пример 10. (2010) Через середину стороны AB квадрата $ABCD$ проведена прямая, пересекающая прямые CD и AD в точках M и T соответственно и образующая с прямой AB угол α, $tg\alpha=3$. Найдите площадь треугольника BMT, если сторона квадрата $ABCD$ равна 4.

Решение. 1) Прямая, проходящая через середину E стороны AB, пересекает *отрезок* CD и продолжение отрезка AD за точку D.

$$S_{BMT}=S_{BTE}-S_{BME}=\frac{1}{2}\cdot BE\cdot AT-\frac{1}{2}\cdot BE\cdot AD=$$

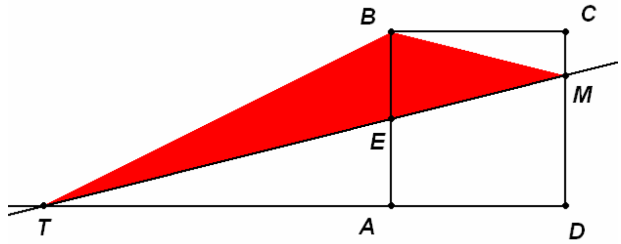
$$=\frac{1}{2}\cdot BE\cdot(AE\cdot tg\alpha-AD)=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot(2\cdot 3-4)=2.$$



2) Прямая, проходящая через середину E стороны AB, пересекает *отрезок* CD и продолжение отрезка AD за точку A.

$$S_{BMT}=S_{BTE}+S_{BME}=\frac{1}{2}\cdot BE\cdot AT+\frac{1}{2}\cdot BE\cdot AD=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot BE\cdot(AE\cdot tg\alpha+AD)=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot(2\cdot 3+4)=10.$$



Почему следующие случаи невозможны?

3) Прямая, проходящая через середину E стороны AB, пересекает продолжение отрезка CD за точку D и *отрезок* AD.

4) Прямая, проходящая через середину E стороны AB, пересекает продолжение отрезка CD за точку C и *отрезок* BC.

Предполагаемые критерии:

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации, и получен правильный ответ.	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины.	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Ответ: 2 или 10.

Взаимное расположение точки и окружности

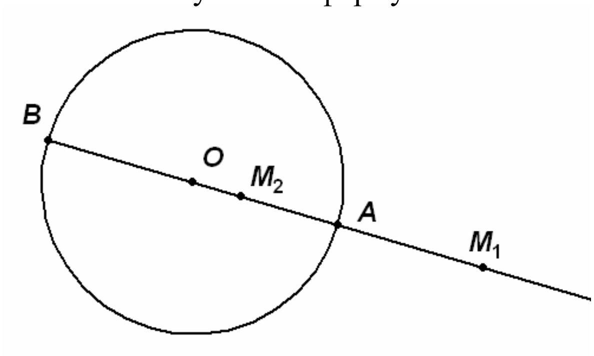
Пример 11. (2010) Дана окружность и точка M. Точки A и B лежат на окружности, причем A – ближайшая к M точка окружности, а B – наиболее удаленная от M точка окружности. Найдите радиус окружности, если $MA = a$ и $MB = b$.

Решение. Точку можно рассматривать в качестве центра окружности нулевого радиуса. Поэтому ближайшая и удаленная точки лежат на линии центров.

1) Пусть точка M расположена внутри круга, ограниченного окружностью. Тогда радиус окружности равен $\dfrac{MA+MB}{2}=\dfrac{a+b}{2}$.

2) Если точка M расположена вне круга, то радиус окружности равен $\dfrac{MB-MA}{2}=\dfrac{b-a}{2}$.

3) Рассмотрите самостоятельно случай, когда точка M расположена на окружности. Будут ли выполняться полученные формулы?



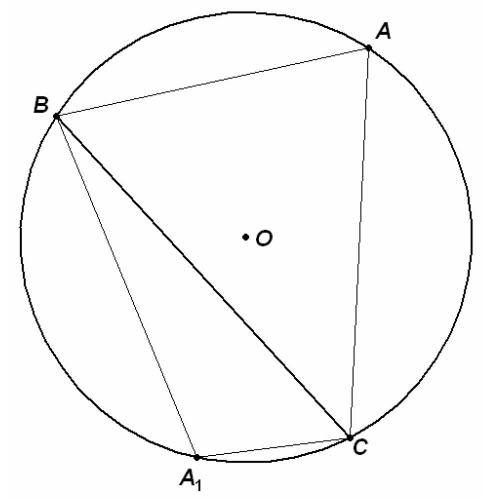
Ответ: $\dfrac{b-a}{2}$ или $\dfrac{b+a}{2}$.

Расположение вершины вписанного угла относительно хорды

Пример 12. Радиус окружности равен 1. Найдите величину вписанного угла, опирающегося на хорду, равную $\sqrt{2}$. Ответ дайте в градусах.

Решение. Воспользуемся формулой $\sin A=\dfrac{a}{2R}$.

Тогда $\sin A=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ и $\angle A=45^\circ$ или $\angle A=135^\circ$.



Ответ: 45° или 135° .

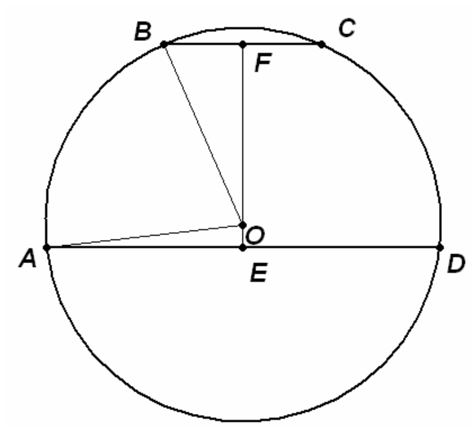
Расположение центра окружности относительно параллельных хорд

Пример 13. Две параллельные хорды окружности, радиус которой 25, имеют длину 14 и 40. Найдите расстояние между этими хордами.

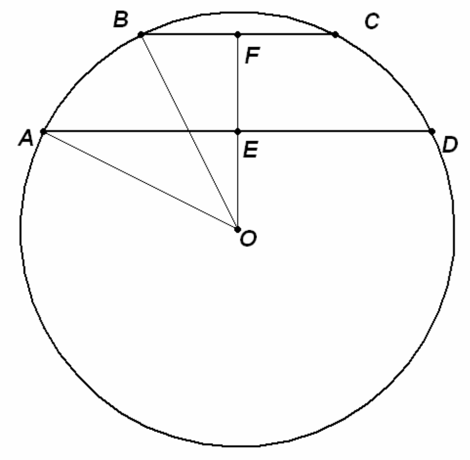
Решение. 1) Хорды расположены по разные стороны от центра окружности. Так как диаметр, перпендикулярный хорде, делит эту хорду пополам, то $BF=FC=7$, $AE=ED=20$.

Из прямоугольных треугольников BOF и AOE находим $OF=\sqrt{25^2-7^2}=24$,

$OE=\sqrt{25^2-20^2}=15$. Длина искомого отрезка равна $EF=OE+OF=24+15=39$.



2) Хорды расположены по одну сторону от центра окружности (рассмотрите самостоятельно).



Ответ: 9 или 39.

Расположение центра описанной окружности относительно треугольника

Пример 14. (2010) Около треугольника ABC описана окружность с центром O, угол AOC равен 60°. В треугольник ABC вписана окружность с центром M. Найдите угол AMC.

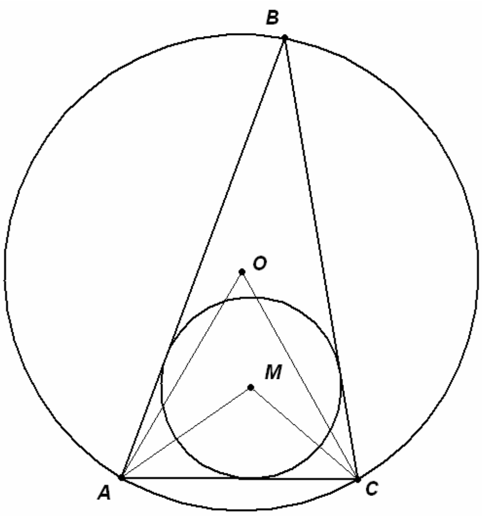
Решение. В равнобедренном треугольнике ABC (OC = OA =R) угол при вершине равен 60°. Следовательно, треугольник ABC - равносторонний и $AC = R$.

Используя следствие обобщенной теоремы синусов, получаем $AC = 2R\sin B$, $R = 2R\sin B$, $\sin B = \frac{1}{2}$. Отсюда $\angle B = 30^\circ$, или $\angle B = 150^\circ$.

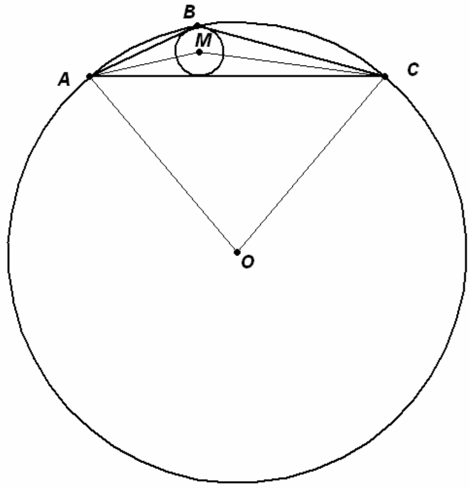
1) Пусть $\angle B = 30^\circ$, тогда $\angle A + \angle C = 150^\circ$.

Центр вписанной окружности М, лежит на пересечении биссектрис, значит $\angle MAC + \angle MCA = 150^\circ : 2 = 75^\circ$.

Тогда $\angle AMC = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$.



2) Случай, когда $\angle B = 150^\circ$, рассмотрите самостоятельно.



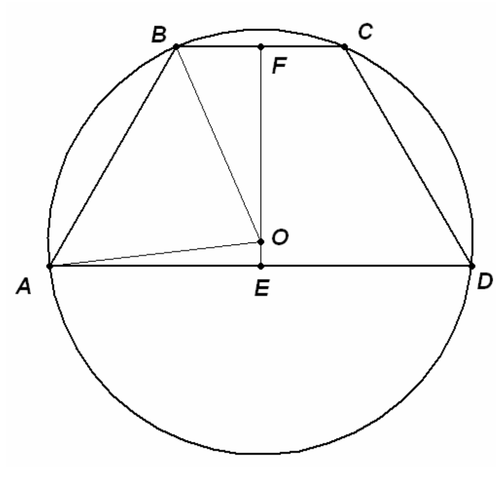
Ответ: 165° или 105°.

Расположение центра описанной окружности относительно трапеции

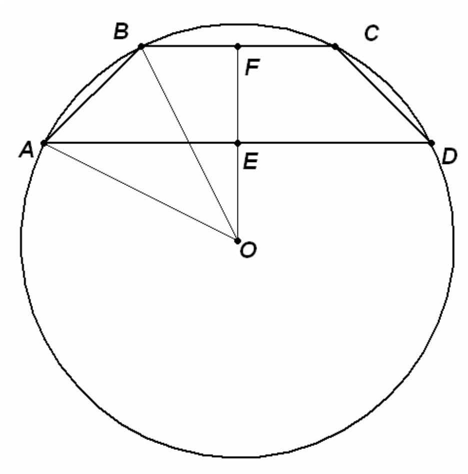
Пример 15. (2010) Трапеция с основаниями 14 и 40 вписана в окружность радиуса 25. Найдите высоту трапеции.

● *Трапеция вписана в некоторую окружность тогда и только тогда, когда она является равнобедренной.*

Решение. Трапеция вписана в окружность, поэтому она равнобедренная. Центр O описанной окружности лежит на пересечении серединных перпендикуляров к сторонам трапеции. 1). Пусть центр окружности лежит внутри трапеции. Далее см. пример 13.



2). Центр окружности лежит вне трапеции.



Ответ: 39 или 9.

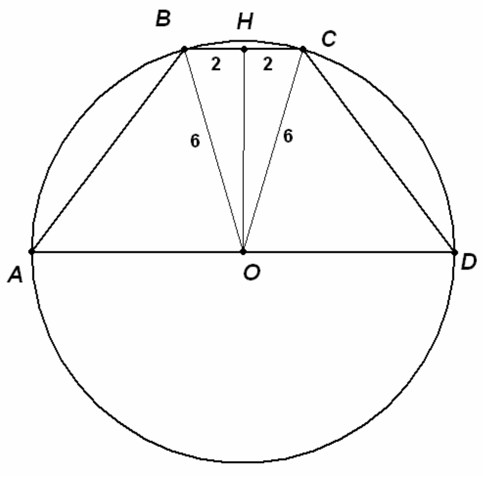
Пример 16. (2010) Около трапеции $ABCD$ описана окружность радиуса 6 с центром на основании AD. Найдите площадь трапеции, если основание BC равно 4.

Решение. Центр O описанной окружности лежит на основании AD, значит,
$AD = 2R = 2 \cdot 6 = 12$. OH – высота и медиана в равнобедренном треугольнике BOC. Получаем $CH = 4 : 2 = 2$ и из прямоугольного треугольника OHC высоту трапеции

$OH = \sqrt{6^2 - 2^2} = 4\sqrt{2}$.

Площадь трапеции равна

$S = \frac{4+12}{2} \cdot 4\sqrt{2} = 32\sqrt{2}$.



Ответ: $32\sqrt{2}$.

Расположение центра окружности относительно касательной

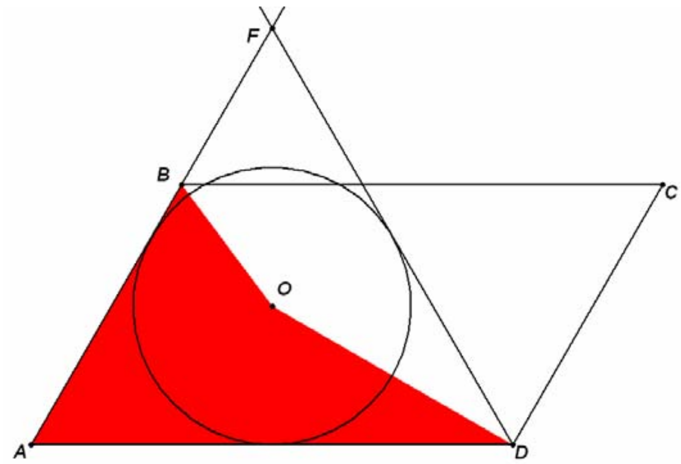
Пример 17. (2010) Дан параллелограмм $ABCD$, $AB = 2$, $BC = 3$, $\angle A = 60^\circ$. Окружность с центром в точке O касается биссектрисы угла D и двух сторон параллелограмма, исходящих из вершины одного его острого угла. Найдите площадь четырехугольника $ABOD$.

• *При проведении биссектрисы угла параллелограмма образуется равнобедренный треугольник.* (докажите)

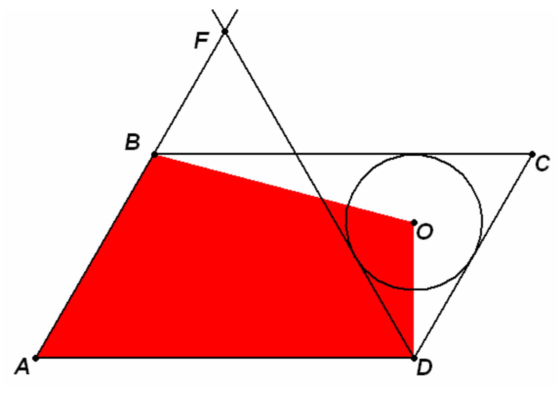
Решение. 1) Окружность вписана в угол с вершиной A.
Треугольник ADF – равнобедренный. Так как $\angle A = 60^\circ$, то треугольник ADF – равносторонний со стороной 3. Радиус вписанной окружности равен $r = \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Находим площадь $S_{ABOD} = S_{AOB} + S_{AOD} =$

$= \frac{1}{2} AB \cdot r + \frac{1}{2} AD \cdot r = \frac{5\sqrt{3}}{4}$.



2) Окружность вписана в угол с вершиной C (рассмотрите самостоятельно).



Ответ: $\frac{5\sqrt{3}}{4}$, $\frac{13\sqrt{3}}{6}$.

Вписанная или вневписанная окружность

Пример 18. (2010) Прямая отсекает от сторон прямого угла отрезки 3 и 4. Найдите радиус окружности, касающейся этой прямой и сторон угла.

● *Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник равен*

$$r = \frac{a+b-c}{2} = p - c \quad \left(\angle C = 90^\circ\right)$$

● *Радиус вневписанной окружности, касающейся гипотенузы прямоугольного треугольника, равен полупериметру этого треугольника.* (докажите)

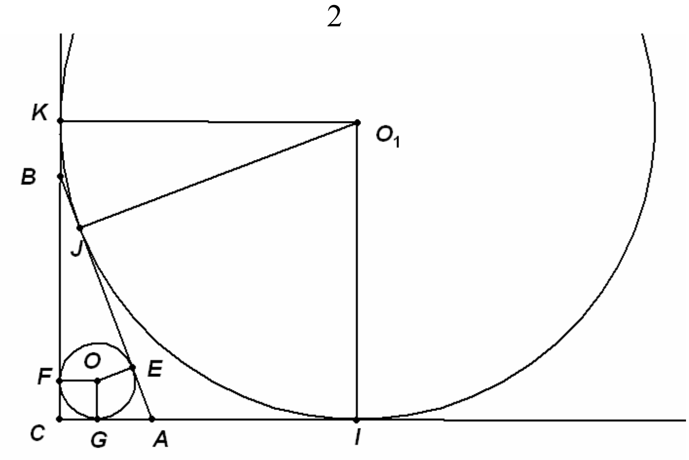
Решение. 1) Окружность вписана в треугольник. Пусть r – радиус вписанной окружности. Так как $FOGC$ – квадрат и отрезки касательных, проведенных из одной точки к окружности, равны, то $AG = AE = b - r$, $BF = BE = a - r$. Тогда $c = AB = AE + BE = b - r + a - r$.

Отсюда $r = \frac{a+b-c}{2} = \frac{3+4-5}{2} = 1.$

Второе решение. Используем метод площадей.

$$S_{ABC} = S_{AOB} + S_{AOC} + S_{BOC} =$$
$$= \frac{1}{2}AB \cdot r + \frac{1}{2}AC \cdot r + \frac{1}{2}BC \cdot r.$$

Отсюда $r = \frac{S_{ABC}}{p} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4}{\frac{3+4+5}{2}} = 1.$



2) Случай (окружность является вневписанной для треугольника ABC) рассмотрите самостоятельно (два способа).

***Ответ*:** 1 или 6.

Пример 19. (2010) Дана трапеция $ABCD$, основания которой $BC = 44$, $AD = 100$, $AB = CD = 35$. Окружность, касающаяся прямых AD и AC, касается стороны CD в точке K. Найдите длину отрезка CK.

● *Проекция боковой стороны равнобедренной трапеции на большее основание равна полуразности оснований, а проекция диагонали — полусумме оснований (средней линии).* (докажите)

● *Пусть окружность вписана в треугольник ABC. Тогда расстояние от вершины A до точки касания окружности со стороной AB равно*

$$x = p - a = \frac{b+c-a}{2} \quad \text{(докажите)}$$

● *Пусть окружность касается стороны BC треугольника ABC и продолжений сторон AB и AC. Тогда расстояние от вершины A до точки касания окружности с прямой AB равно полупериметру треугольника ABC.* (докажите)

Решение. Опустим из вершин B и C трапеции на сторону AD перпендикуляры BE и CF соответственно. Тогда $AE = \frac{100-44}{2} = 28$,

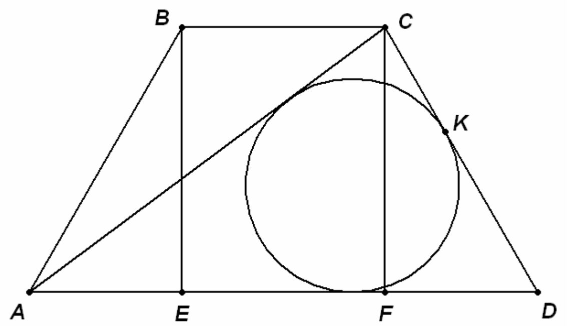
$AF = \frac{100+44}{2} = 72$. Далее вычисляем

$BE = \sqrt{AB^2 - AE^2} = \sqrt{35^2 - 28^2} = 21,$

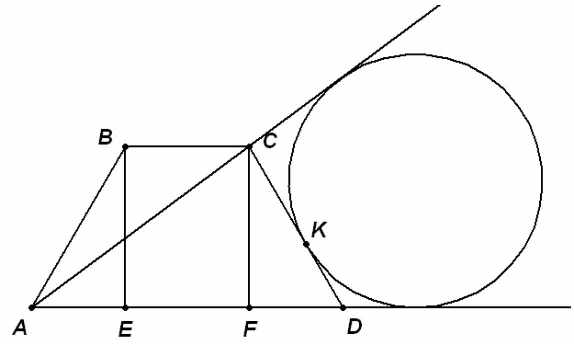
$AC = \sqrt{AF^2 + CF^2} = \sqrt{72^2 + 21^2} = 75.$

1) Окружность вписана в треугольник ACD. Получаем

$$CK = \frac{AC + CD - AD}{2} = \frac{75 + 35 - 100}{2} = 5.$$



2) Случай (окружность является вневписанной для треугольника ACD) рассмотрите самостоятельно.



Ответ: 5 или 30.

Расположение точки касания на прямой

Пример 20. (2010) На стороне BA угла ABC, равного 30°, взята такая точка D, что $AD = 2$ и $BD = 1$. Найдите радиус окружности, проходящей через точки A, D и касающейся прямой BC.

Решение. Центр искомой окружности лежит на пересечении серединного перпендикуляра к отрезку AD с перпендикуляром к прямой BC, проходящим через точку касания. Для точки касания X искомой окружности с прямой BC по теореме о касательной и секущей имеем

$$BX^2 = BD \cdot AB = 1 \cdot 3,$$

откуда $BX = \sqrt{3}$.

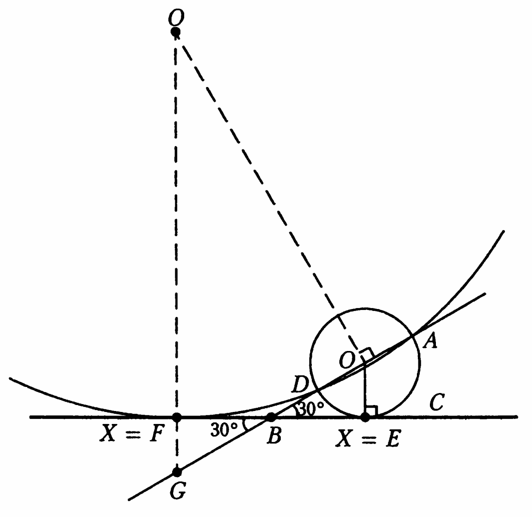
1) Точка касания лежит на луче BC.

В прямоугольном треугольнике OBE

$\angle OBE = 30^\circ$, $OB = 2$, $BE = \sqrt{3}$.

$OE = OA = OD = 1$.

Тогда центр окружности совпадает с серединой O отрезка AD и точка X совпадает с точкой E. Искомый радиус окружности равен 1.



2) Точка касания лежит на продолжении луча BC за точку B (рассмотрите самостоятельно).

Предполагаемые критерии:

Содержание критерия	Баллы
В представленном решении верно найдены радиусы обеих окружностей.	3
Рассмотрены оба случая расположения окружности, но верно найден радиус только в одном из них.	2
Рассмотрен только один случай расположения окружности и верно найден ее радиус.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Ответ: 1 или 7.

Внешняя или внутренняя касательная непересекающихся окружностей

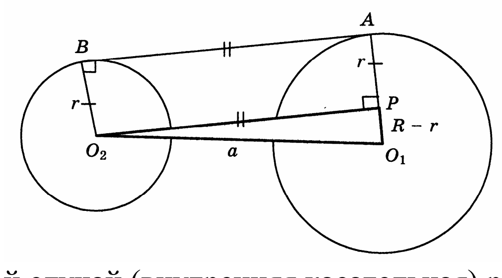
Пример 21. (2010) Прямая касается окружностей радиусов R и r в точках A и B. Известно, что расстояние между центрами равно a, причем $r < R$ и $r + R < a$. Найдите AB.

Решение. Пусть O_1 – центр окружности радиуса R, O_2 – центр окружности радиуса r, A и B соответственно – точки касания окружностей с их общей внешней касательной, P – основание перпендикуляра, опущенного из O_2 на O_1A.

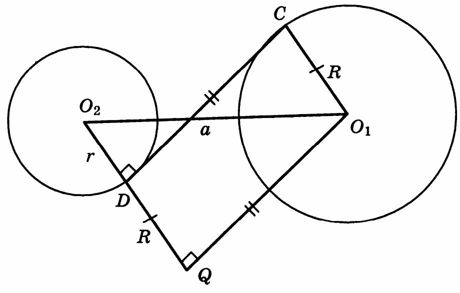
Из прямоугольного треугольника O_1O_2P находим, что

$$O_2P = \sqrt{O_1O_2^{\,2} - O_1P^2} = \sqrt{a^2 - (R-r)^2},$$

а так как APO_2B - прямоугольник, то $AB = O_2P = \sqrt{a^2 - (R-r)^2}$.



Второй случай (внутренняя касательная) рассмотрите самостоятельно.



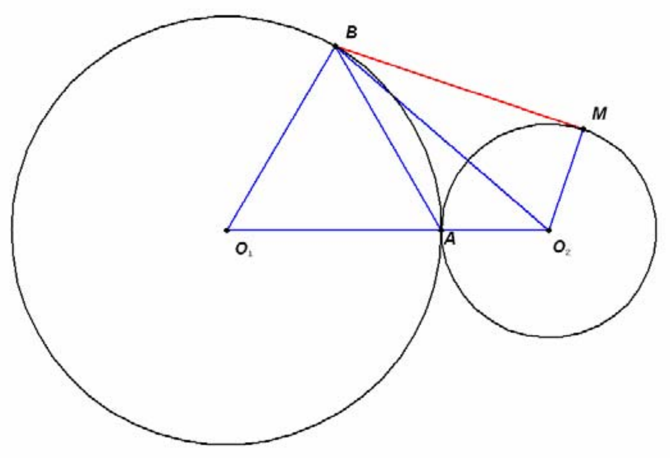
Ответ: $\sqrt{a^2-(R-r)^2}$ или $\sqrt{a^2-(R+r)^2}$.

Касающиеся окружности (внешнее или внутреннее касание)

Пример 22. (2010) Окружности S_1 и S_2 радиусов R и r $(R>r)$ соответственно касаются в точке A. Через точку B, лежащую на окружности S_1, проведена прямая, касающаяся окружности S_2 в точке M. Найдите BM, если известно, что $AB=a$.

Первое решение. 1) Окружности касаются внешним образом. Пусть O_1 и O_2 - центры окружностей S_1 и S_2 соответственно, а $\angle O_1AB=\varphi$.

Применим теорему косинусов для треугольника O_1AB: $O_1B^2=O_1A^2+AB^2-2O_1A\cdot AB\cos\varphi$ или $R^2=R^2+a^2-2Ra\cos\varphi$. Отсюда получим $\cos\varphi=\dfrac{a}{2R}$.



Теперь используем теорему косинусов для треугольника O_2AB:

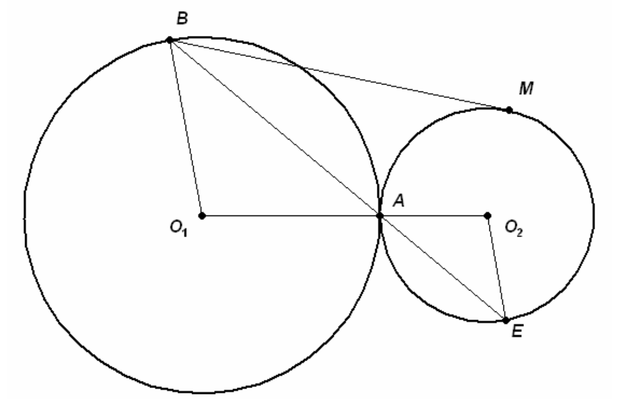
$O_2B^2=O_2A^2+AB^2+2O_2A\cdot AB\cos\varphi$ или $O_2B^2=r^2+a^2+2r\cdot a\cos\varphi$. Подставим $\cos\varphi=\dfrac{a}{2R}$ и получим $O_2B^2=r^2+a^2+\dfrac{a^2r}{R}$.

Из прямоугольного треугольника O_2BM $(\angle O_2BM=90^\circ)$, используя теорему Пифагора, находим

$$BM^2=O_2B^2-r^2=r^2+a^2+\frac{a^2r}{R}-r^2=$$

$$=a^2\left(1+\frac{r}{R}\right).$$ Отсюда $BM=a\cdot\sqrt{1+\dfrac{r}{R}}$.

Второе решение.



Продолжим AB до пересечения с окружностью S_2 в точке E. Треугольники AO_1B и AO_2E равнобедренные и подобные, так как $\angle O_1AB=\angle OA_2E$.

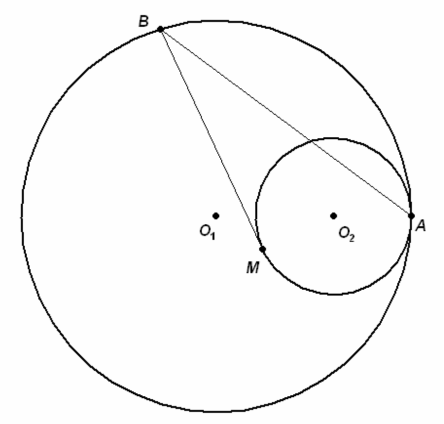
Следовательно, $\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{r}{R}$ и $AE=\dfrac{ar}{R}$.

По теореме о секущей и касательной имеем $BM^2=BA\cdot BE$, $BM^2=BA\cdot(BA+AE)$,

$$BM^2=a\cdot\left(a+\frac{ar}{R}\right),$$

$$BM=\sqrt{a\cdot\left(a+\frac{ar}{R}\right)}=a\cdot\sqrt{1+\frac{r}{R}}.$$

2) Окружности касаются внутренним образом (рассмотрите самостоятельно).



Ответ: $a\cdot\sqrt{1\pm\frac{r}{R}}$

Пример 23. (2010) Вершина равнобедренного треугольника с боковой стороной 5 и основанием 8 служит центром данной окружности радиуса 2. Найдите радиус окружности, касающейся данной и проходящей через концы основания треугольника.

Решение. Пусть D – середина основания AC данного треугольника ABC. Обозначим через E и F точки пересечения прямой BD и окружности с центром в точке B и радиусом 2. Тогда $AD=4$, $BD=3$, $ED=1$, $FD=5$.

Из треугольников ADE и ADF найдем $AE=\sqrt{4^2+1^2}=\sqrt{17}$, $AF=\sqrt{4^2+5^2}=\sqrt{41}$ соответственно. Площади $S_{AEC}=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 1=4$,

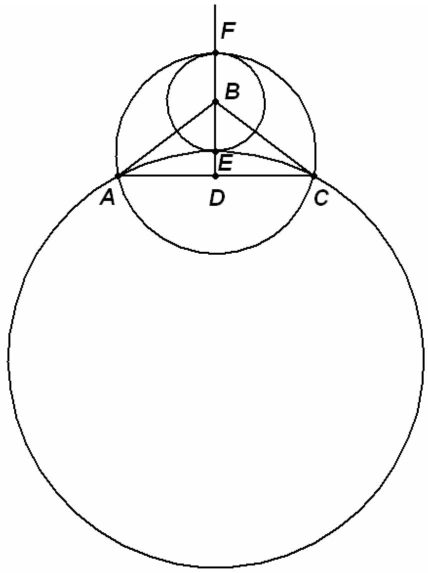
$S_{AFC}=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 5=20$.

1) Искомая окружность описана вокруг треугольника AEC. Найдем ее радиус

$$R=\frac{AE\cdot EC\cdot AC}{4S_{AEC}}=\frac{17\cdot 8}{4\cdot 4}=\frac{17}{2}.$$

2) Искомая окружность описана вокруг треугольника AFC. Найдем ее радиус

$$R=\frac{AF\cdot FC\cdot AC}{4S_{AFC}}=\frac{41\cdot 8}{4\cdot 20}=\frac{41}{10}.$$



Ответ: $\frac{17}{2}$ или $\frac{41}{10}$.

Пример 24. (2010) Дана окружность радиуса 2 с центром O. Хорда AB пересекает радиус OC в точке D, причем $\angle CDA=120^\circ$. Найдите радиус окружности, вписанной в угол ADC и касающейся дуги AC, если $OD=\sqrt{3}$.

Решение. 1) Рассмотрим внутреннее касание окружностей. Пусть радиус искомой окружности с центром O_1 равен r. E – точка касания этой окружности с радиусом OC. В прямоугольном треугольнике EDO_1 $\angle EDO_1=60^\circ$ (O_1D - биссектриса угла ADC).

$$DE=r\cdot ctg 60^\circ=\frac{r}{\sqrt{3}}.$$

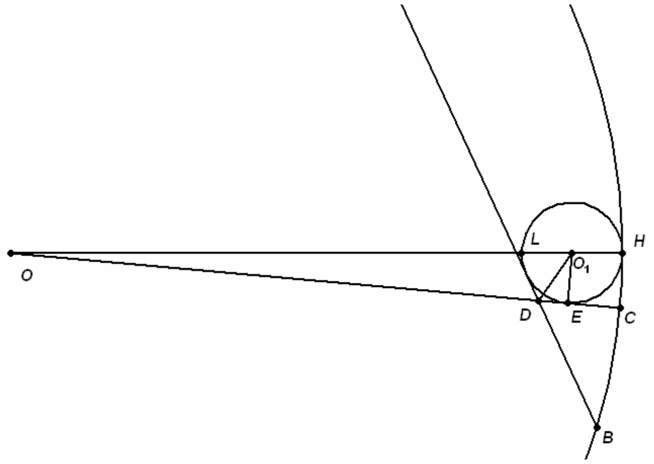
Используем теорему о секущей и касательной.

$$OL\cdot OH=OE^2,\ (2-2r)\cdot 2=\left(\sqrt{3}+\frac{r}{\sqrt{3}}\right)^2,$$

$$r^2+18r-3=0.$$

Откуда один положительный корень

$r=2\sqrt{21}-9$.



2) Случай внешнего касания окружностей рассмотрите самостоятельно. Искомая окружность касается продолжений сторон DC и DA и данной окружности.

***Ответ*:** $2\sqrt{21}-9$ или $3+2\sqrt{3}$.

Расположение центров пересекающихся окружностей относительно их общей хорды

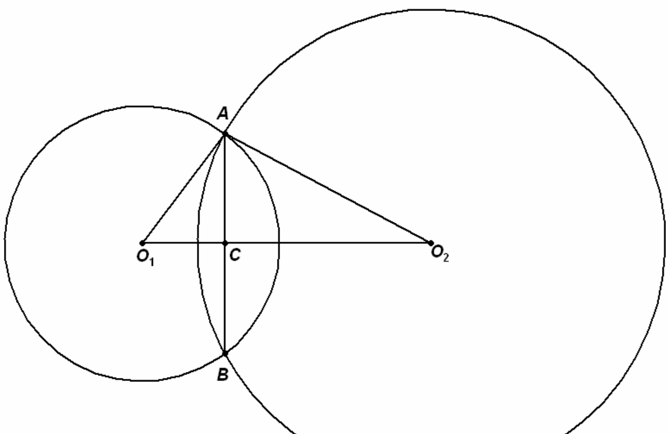
Пример 25. (2010) Окружности радиусов 10 и 17 пересекаются в точках A и B. Найдите расстояние между центрами окружностей, если $AB = 16$.

Решение. 1) Центры окружностей лежат по разные стороны от их общей хорды AB.

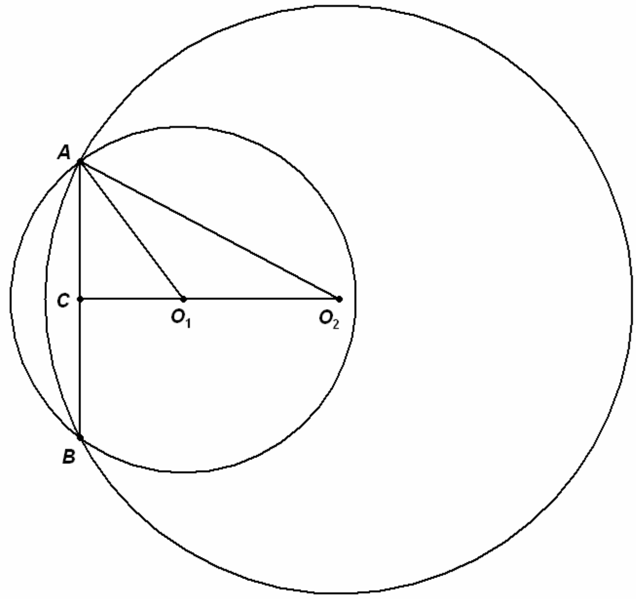
Линия центров O_1O_2 перпендикулярна хорде AB и делит ее в точке пересечения C пополам.

Из прямоугольных треугольников O_1AC и O_2AC соответственно получаем $O_1C=\sqrt{10^2-8^2}=6$ и $O_2C=\sqrt{17^2-8^2}=15$.

Искомое расстояние между центрами равно $O_1O_2=O_1C+O_2C=6+15=21$.



2) Центры окружностей лежат по одну сторону от хорды AB (рассмотрите самостоятельно).



***Ответ*:** 21 или 9.

Пример 26. (2010) Окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Известно, что $\angle AO_1B=90^\circ$, $\angle AO_2B=60^\circ$, $O_1O_2=a$. Найдите радиусы окружностей.

• *Линия центров двух пересекающихся окружностей перпендикулярна их общей хорде и делит ее пополам.* (докажите)

Решение. 1) Центры окружностей лежат по разные стороны от их общей хорды AB.

Так как треугольники AO_1B и AO_2B равнобедренные, то линия центров является биссектрисой углов AO_1B и AO_2B. Имеем $\angle AO_1C=45^\circ$, $\angle AO_2C=30^\circ$.

Пусть $AC=x$. Из треугольника AO_1C получаем $\angle AO_1C=\angle CAO_1=45^\circ$, $O_1C=AC=x$. Для треугольника AO_2C имеем

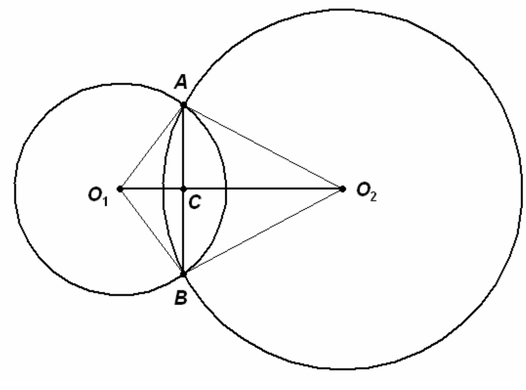
$O_2C=AC\cdot ctg30^\circ=x\sqrt{3}$.

Далее имеем $O_1O_2=O_1C+O_2C$ или

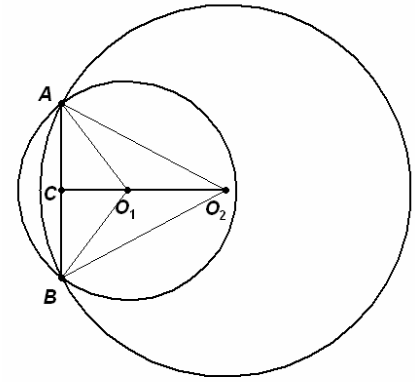
$a=x+x\sqrt{3}$. Отсюда находим $x=\dfrac{a}{\sqrt{3}+1}$.

Тогда $O_1A=x\sqrt{2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}$,

$O_2A=2AC=2x=\dfrac{2a}{\sqrt{3}+1}$.



2) Центры окружностей лежат по одну сторону от хорды AB (рассмотрите самостоятельно).

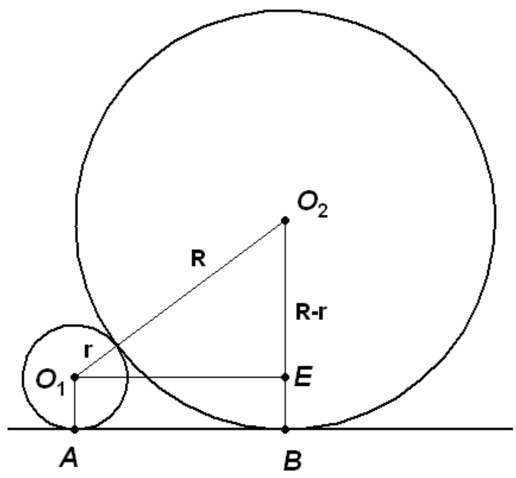


Ответ: $\dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}$, $\dfrac{2a}{\sqrt{3}+1}$ или $\dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}$, $\dfrac{2a}{\sqrt{3}-1}$.

Окружность, касающаяся одной из двух дуг другой окружности

Пример 27. (2010) Точка O – центр окружности радиуса 2. На продолжении радиуса OM взята точка A. Через точку A проведена прямая, касающаяся окружности в точке K. Известно, что $\angle OAK = 60^\circ$. Найдите радиус окружности, вписанной в угол OAK и касающейся данной окружности внешним образом.

- *Отрезок общей внешней касательной к двум касающимся окружностям радиусов r и R равен* $2\sqrt{Rr}$. (докажите)



Решение. Центр O_1 искомой окружности лежит на биссектрисе угла A, поэтому $\angle O_1AK_1 = 30^\circ$.

K_1 - точка касания этой окружности с прямой AK. Из треугольника O_1AK_1 находим $AK_1 = r \cdot ctg30^\circ = r\sqrt{3}$, где r – радиус искомой окружности.

Из треугольника OAK находим $AK = OK \cdot ctg60^\circ = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Отрезок внешней касательной окружностей с центрами O и O_1 равен $2\sqrt{OK \cdot O_1K_1} = 2\sqrt{2r}$.

Получаем $AK = AK_1 + K_1K$,

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = r\sqrt{3} + 2\sqrt{2r}.$$

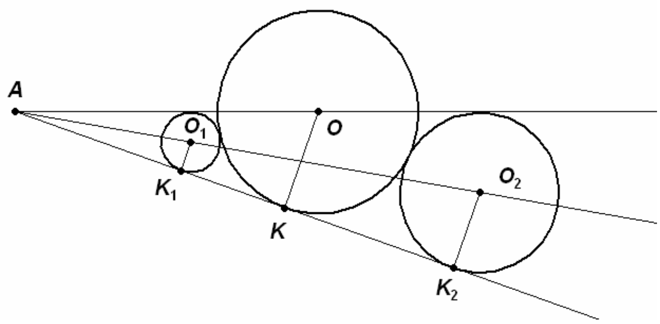
Решаем квадратное уравнение

$3t^2 + 2\sqrt{6}\,t - 2 = 0$, где $t = \sqrt{r}$.

Получаем единственный положительный корень

$t = \dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{3}$. Тогда

$$r = \left(\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{3}\right)^2 = \frac{6-4\sqrt{2}}{3}.$$



Еще один случай расположения окружностей рассмотрите самостоятельно.

Ответ: $2 \pm \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

Тематические задачи

Медианы треугольника

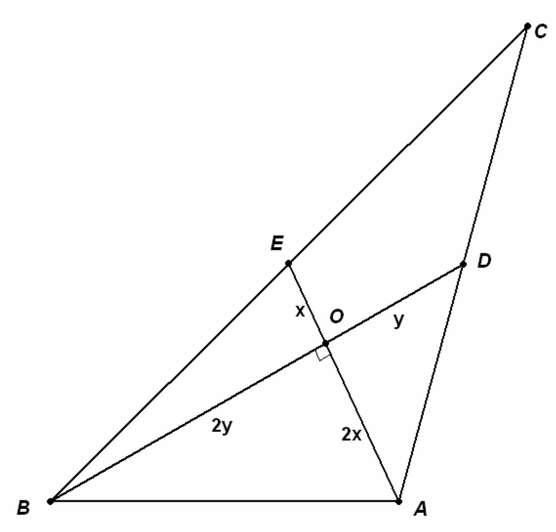
Пример 28. (2010) Найдите площадь треугольника ABC, если $AC = 3$, $BC = 4$, а медианы, проведенные из вершин A и B, перпендикулярны.

• *Каждая медиана делится точкой пересечения в отношении 2:1, считая от вершины.*
• *Три медианы делят треугольник на шесть равновеликих треугольников.* (докажите)

Решение. Пусть медианы BD и AE пересекаются в точке O. Обозначим $OE = x$, $OD = y$. Тогда по свойству медиан треугольника $AO = 2x$, $BO = 2y$ и из прямоугольных треугольников BOE и AOD получим уравнения $4y^2 + x^2 = 4$ и $y^2 + 4x^2 = 2{,}25$. Решая полученную систему, получаем $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ и $y = \dfrac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}}$.
Далее находим

$$S_{AOB} = 0{,}5 \cdot 2x \cdot 2y = 2xy = \frac{\sqrt{11}}{3}.$$

$$S_{ABC} = 3S_{AOB} = \sqrt{11}.$$



Ответ: $\sqrt{11}$.

Биссектрисы треугольника

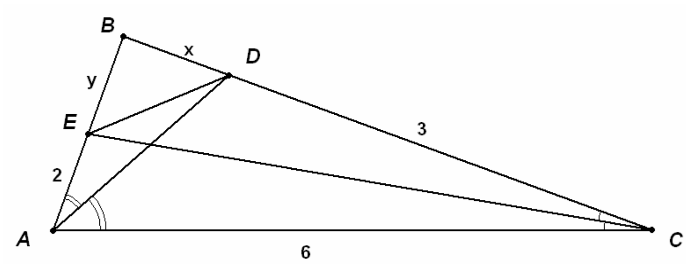
Пример 29. (2010) В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и CE. Найдите длину отрезка DE, если $AC = 6$, $AE = 2$, $CD = 3$.

• *Биссектриса делит сторону треугольника на части, пропорциональные длинам прилежащих сторон.*

Решение. Обозначим $BD = x$, $BE = y$. По свойству биссектрисы получаем $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$ и $\dfrac{AE}{BE} = \dfrac{AC}{BC}$ или $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y+2}{6}$ и $\dfrac{2}{y} = \dfrac{6}{x+3}$.
Из решения системы

$$\begin{cases} 6x = 3y + 6 \\ 2x + 6 = 6y \end{cases}$$

находим $x = 1{,}8$ и $y = 1{,}6$. Тогда $BC = 4{,}8$ и $AB = 3{,}6$.



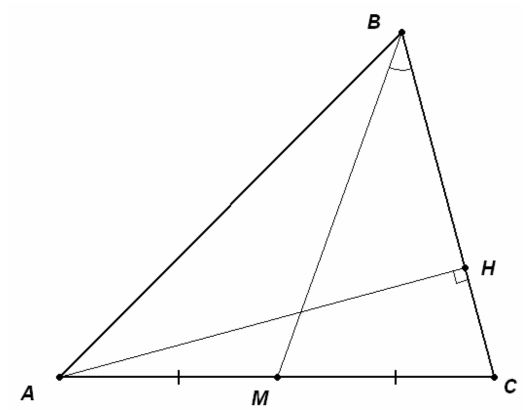
Так как $3{,}6^2 + 4{,}8^2 = 6^2$, то по теореме, обратной теореме Пифагора, имеем $\angle B = 90^\circ$.
Тогда $ED^2 = x^2 + y^2 = 1{,}6^2 + 1{,}8^2 = 5{,}8.$
Ответ: $\sqrt{5{,}8}$.

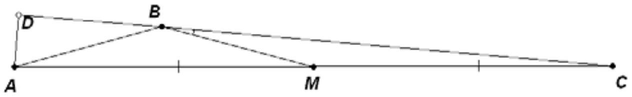
Метод площадей

Пример 30. (2010) Медиана BM треугольника ABC равна его высоте AH. Найдите угол MBC.
Решение. Пусть $\angle MBC = \alpha$. Найдем площадь треугольника ABC двумя способами. Так как медиана BM треугольника ABC разбивает его на два равновеликих треугольника, то

$$S_{ABC} = 2S_{CBM} = 2 \cdot \frac{1}{2} BC \cdot BM \sin\alpha = BC \cdot BM \sin\alpha.$$

С другой стороны, $S_{ABC} = 0{,}5BC \cdot AH$. Учитывая, что $AH = BM$, приравняем площади $BC \cdot BM \sin\alpha = 0{,}5BC \cdot AH$. Получаем, что $\sin\alpha = 0{,}5$. Отсюда $\alpha = 30^\circ$ или $\alpha = 150^\circ$.





***Ответ*:** 30° или 150°.

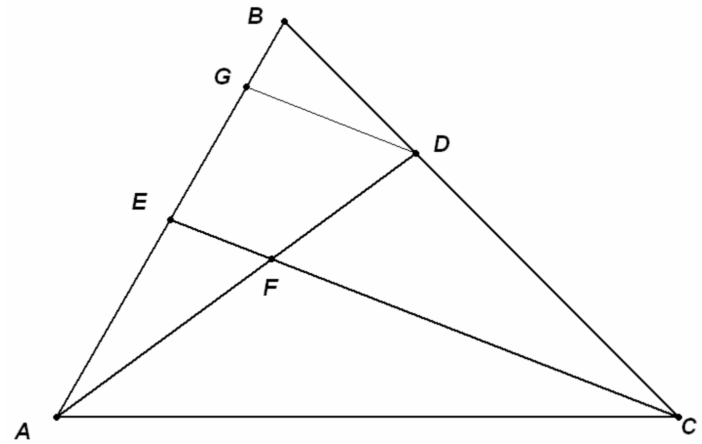
Отношение отрезков и площадей

Пример 31. (2010) В треугольнике ABC на стороне BC выбрана точка D так, что $BD:DC=1:2$. Медиана CE пересекает отрезок AD в точке F. Какую часть площади треугольника ABC составляет площадь треугольника AEF?

• *Медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника.* (докажите)
• *Параллельные прямые отсекают на сторонах угла (на двух прямых) пропорциональные отрезки (обобщенная теорема Фалеса).*

Решение. Возьмем точку G на AB так, что $DG \parallel EC$. Пусть $BG=x$.
В треугольнике BCE используем теорему Фалеса:
$\dfrac{EG}{BG}=\dfrac{CD}{DB}=\dfrac{2}{1}$. Тогда $EG=2x$, и
$AE=EB=3x$.
В треугольнике ADG используем теорему Фалеса:
$\dfrac{AF}{AD}=\dfrac{AE}{AG}=\dfrac{3}{5}$.
Для треугольников ABD и ACD, имеющих общую высоту, получаем $\dfrac{S_{ABD}}{S_{ABC}}=\dfrac{BD}{BC}=\dfrac{1}{3}$
и $S_{ABD}=\dfrac{1}{3}S_{ABC}$.

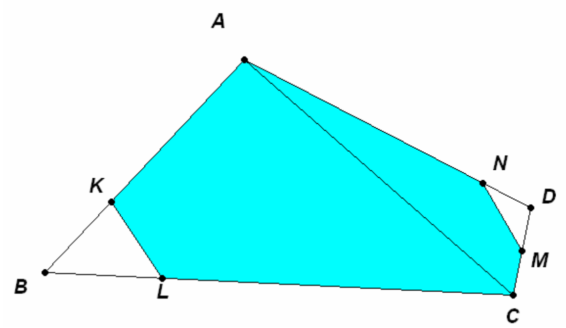
Для треугольников AFE и ADG, имеющих общий угол, получаем
$$\frac{S_{AFE}}{S_{ADG}}=\frac{AE\cdot AF}{AB\cdot AD}=\frac{AE}{AB}\cdot\frac{AF}{AD}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}=\frac{3}{10}.$$
$$S_{AFE}=\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{3}S_{ABC}=\frac{1}{10}S_{ABC}.$$



***Ответ*:** 0,1.

Пример 32. (2010) На сторонах выпуклого четырехугольника $ABCD$, площадь которого равна единице, взяты точки $K \in AB$, $L \in BC$, $M \in CD$ и $N \in DA$**N ∈ DA**. При этом $\dfrac{AK}{KB}=2$, $\dfrac{BL}{LC}=\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{CM}{MD}=1$, $\dfrac{DN}{NA}=\dfrac{1}{3}$. Найдите площадь шестиугольника $AKLCMN$.
• *Отношение площадей треугольников, имеющих общий угол, равно отношению произведению сторон этого угла.* (докажите)

Решение. Отношение площадей треугольников KBL и ABC
равно $\dfrac{BK\cdot BL}{AB\cdot BC}=\dfrac{BK}{AB}\cdot\dfrac{BL}{BC}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{12}$.
Отношение площадей треугольников MND и ADC
равно $\dfrac{DN\cdot DM}{AD\cdot CD}=\dfrac{DN}{AD}\cdot\dfrac{DM}{DC}=\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{12}$.
Значит, сумма площадей треугольников KBL и MND составляет $\dfrac{1}{12}$ от площади данного четырехугольника, а площадь шестиугольника составляет $\dfrac{11}{12}$ т.е. равна $\dfrac{11}{12}\cdot 1=\dfrac{11}{12}$.



Ответ: $\dfrac{11}{12}$.

Пример 33. (2010) В треугольнике ABC, площадь которого равна S, биссектриса CE и медиана BD пересекаются в точке F. Найдите площадь четырехугольника $ADFE$, если $BC = a$, $AC = b$.

• *Медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника.* (докажите)
• *Если у двух треугольников равны высоты, то их площади относятся как основания.* (докажите)

Решение. 1) По свойству биссектрисы CE имеем $\dfrac{AE}{BE} = \dfrac{CA}{CB} = \dfrac{b}{a}$. Тогда для треугольников ACE и ABC с общей высотой (можно провести из вершины C) получаем $\dfrac{S_{AEC}}{S_{ABC}} = \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{b}{a+b}$. Отсюда $S_{AEC} = \dfrac{bS}{a+b}$.

2) Так как BD – медиана, то $S_{BDC} = \dfrac{S_{ABC}}{2} = \dfrac{S}{2}$.

3) CF – биссектриса в треугольнике BDC, поэтому $\dfrac{DF}{FB} = \dfrac{CD}{DB} = \dfrac{b}{2a}$.

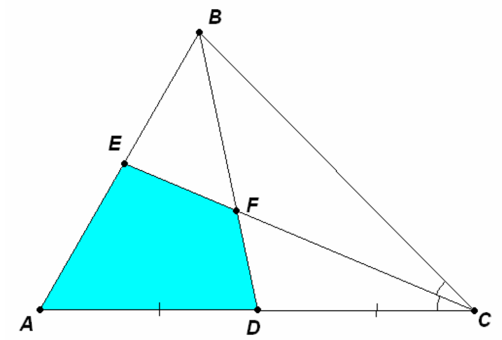
Для треугольников CDF и BCD с общей высотой (можно провести из вершины C) получаем $\dfrac{S_{CDF}}{S_{BDC}} = \dfrac{DF}{DB} = \dfrac{b}{2a+b}$.

Отсюда $S_{CDF} = \dfrac{b}{2a+b} \cdot S_{BDC} = \dfrac{bS}{2(2a+b)}$.

4) Теперь $S_{ADFE} = S_{AEC} - S_{CDF} =$

$$= \frac{bS}{a+b} - \frac{bS}{2(2a+b)} = bS\left(\frac{1}{a+b} - \frac{1}{2(2a+b)}\right) = .$$

$$= \frac{Sb(3a+b)}{2(a+b)(2a+b)}.$$



Ответ: $\dfrac{Sb(3a+b)}{2(a+b)(2a+b)}$.

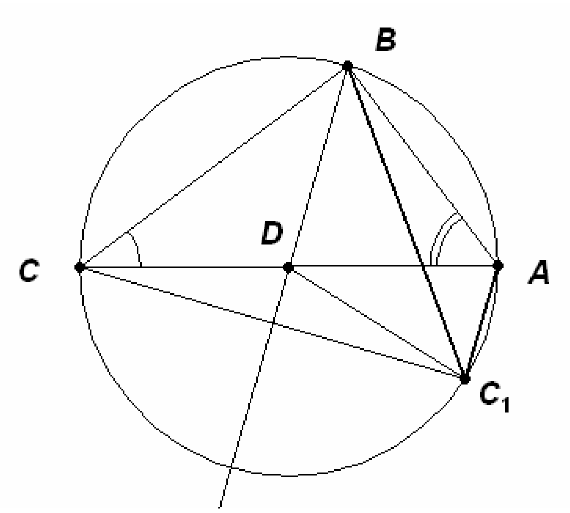
Метод вспомогательной окружности

Пример 34. (2010) Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине B и углом α при вершине A. Точка D - середина гипотенузы. Точка C_1 симметрична точке C относительно прямой BD. Найдите угол AC_1B .

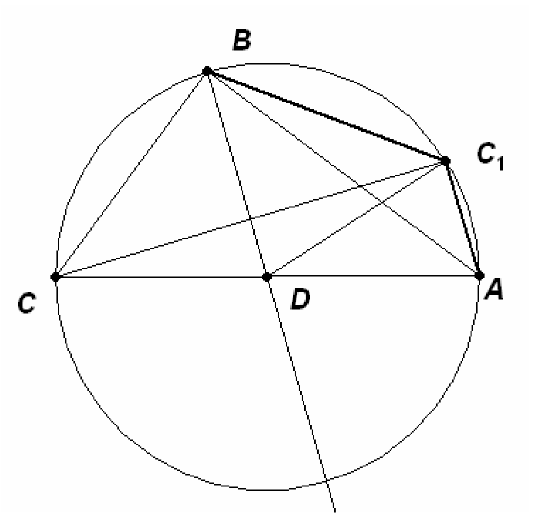
• *Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, лежит на середине гипотенузы.*

Решение. Так как прямая BD является серединным перпендикуляром к отрезку CC_1, то $DC = DC_1$. С другой стороны, точка D – центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника. Поэтому $DC = DB = DA$. Отсюда следует, что точка C_1 принадлежит описанной окружности.

1) Если $\alpha = 45^\circ$, то центральный угол $\angle BDC = 2 \cdot \angle BAC = 90^\circ$. В этом случае ось BD перпендикулярна гипотенузе AC. Точка C отобразится в точку A, и угол AC_1B не будет определен.



2) Пусть $\alpha > 45^\circ$, тогда центральный угол $\angle BDC = 2\alpha > 90^\circ$. В этом случае точки C и C_1 расположены по одну сторону от хорды AB. В прямоугольном треугольнике $\angle BCA = 90^\circ - \alpha$. Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны. Поэтому
$\angle AC_1B = \angle BCA = 90^\circ - \alpha$.



3) Пусть $\alpha < 45^\circ$, тогда центральный угол $\angle BDC < 90^\circ$. В этом случае точки C и C_1 расположены по разные стороны от хорды AB. Четырехугольник AC_1BC вписан в окружность, поэтому
$\angle AC_1B = 180^\circ - \angle BCA = 180^\circ - (90^\circ - \alpha) = 90^\circ + \alpha$.

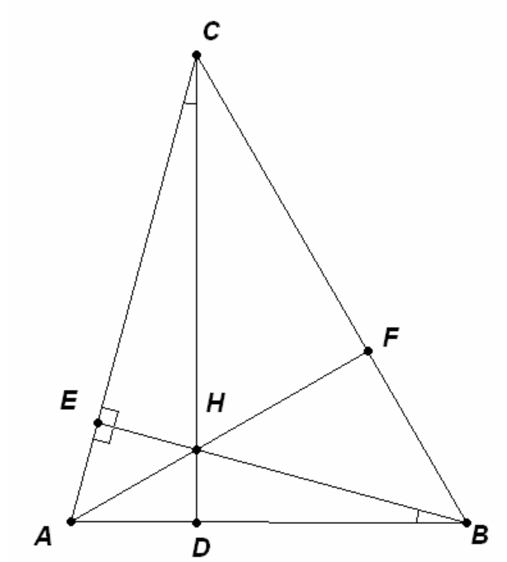
Ответ: $90^\circ + \alpha$, если $0^\circ < \alpha < 45^\circ$; $90^\circ + \alpha$, если $45^\circ < \alpha < 90^\circ$; при $\alpha = 45^\circ$ точка C_1 совпадает с точкой A и угол не определен.

Высоты треугольника

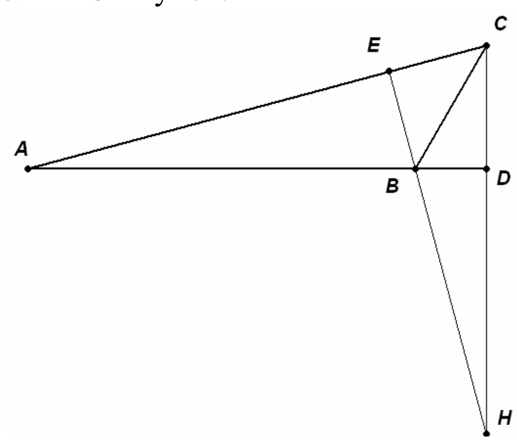
Пример 35. (2010) Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H. Известно, что $CH = AB$. Найдите угол ACB.

• *(Признак равенства прямоугольных треугольников) Если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.*

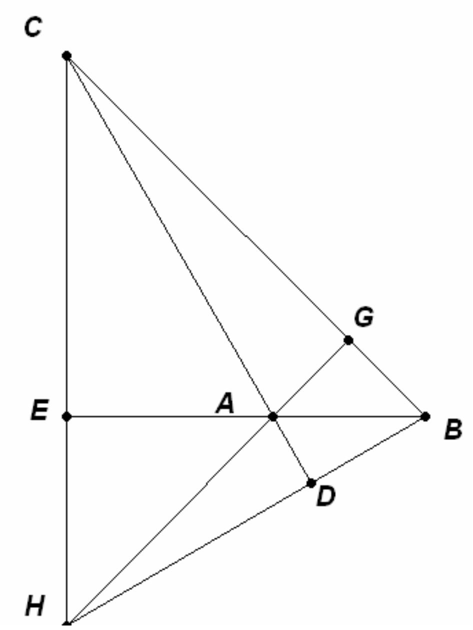
Решение. 1) Треугольник ABC - остроугольный. Пусть BE и CD – высоты треугольника. Углы ABE и HCE равны, как углы с соответственно перпендикулярными сторонами. Треугольники ABE и HCE равны по гипотенузе ($CH = AB$) и острому углу. Отсюда $AE = EH$, и значит, $\angle EAH = \angle AHE = 45^\circ$. В прямоугольном треугольнике ACF имеем $\angle CAF = 45^\circ$, поэтому $\angle ACF = 45^\circ$.



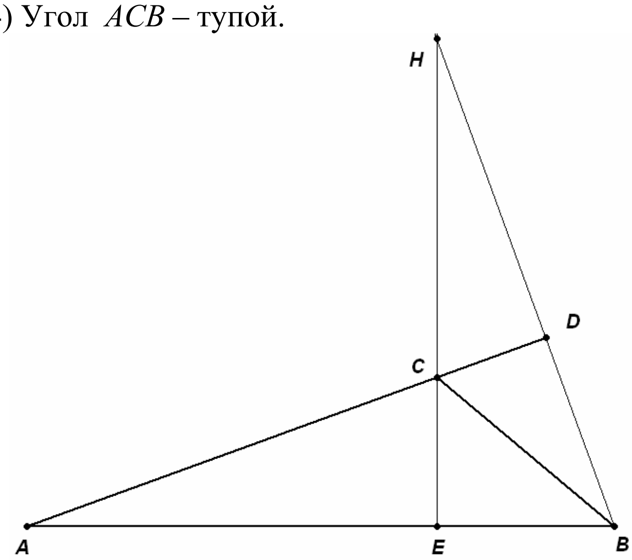
Остальные случаи рассмотрите самостоятельно.
2) Угол ABC – тупой.



3) Угол BAC – тупой.



4) Угол ACB – тупой.



5) Угол ABC – прямой.
6) Угол BAC – прямой.
7) Случай, когда угол ACB – прямой, невозможен (почему?).

Ответ: 45° или 135°.

Пример 36. (2010) Точки A_1, B_1, C_1 — основания высот треугольника ABC. Углы треугольника $A_1B_1C_1$ равны 90°, 60° и 30°. Найдите углы треугольника ABC.

● *Пусть в треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1. Тогда треугольник A_1BC_1 подобен данному с коэффициентом подобия, равным $|\cos B|$.*

Рассмотрим остроугольный треугольник (см. ниже рисунок). Для прямоугольных треугольников BA_1A и BC_1C имеем

$\dfrac{BA_1}{AB} = \cos B$ и $\dfrac{BC_1}{BC} = \cos B$ соответственно.

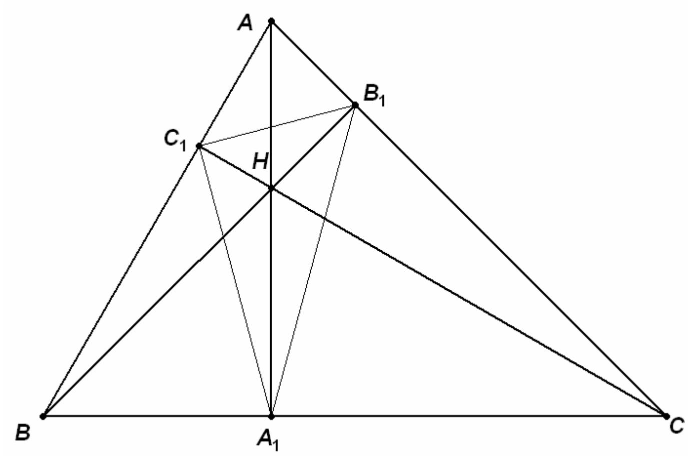
Следовательно треугольники BA_1C_1 и BAC подобны (второй признак), так как имеют общий угол B и $\dfrac{BA_1}{AB} = \dfrac{BC_1}{BC} = \cos B$.

Случай тупого угла B рассмотрите самостоятельно.

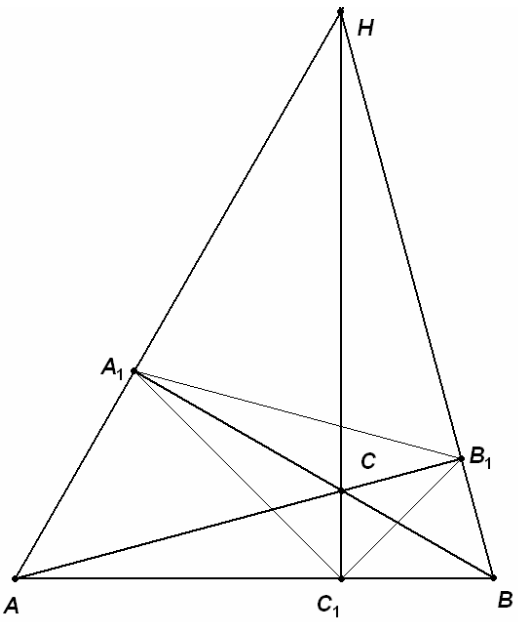
Решение. 1) Треугольник ABC – остроугольный. Так как треугольник BC_1A_1 подобен треугольнику ABC, то $\angle BC_1A_1 = \angle BCA$. Аналогично из подобия треугольников AB_1C_1 и ABC имеем $\angle AC_1B_1 = \angle BCA$. Далее развернутый угол при вершине C_1 составлен из суммы углов BC_1A_1, AC_1B_1 и $B_1C_1A_1$. Отсюда получаем соотношение $2\angle C + \angle B_1C_1A_1 = 180^\circ$ или $\angle C = 90^\circ - \dfrac{1}{2}\angle B_1C_1A_1$. Такие же равенства можно получить для других острых углов. Используем данные углы:

$90^\circ - \dfrac{1}{2}\cdot 90^\circ = 45^\circ$, $90^\circ - \dfrac{1}{2}\cdot 60^\circ = 60^\circ$,

$90^\circ - \dfrac{1}{2}\cdot 30^\circ = 75^\circ$.



Остальные случаи рассмотрите самостоятельно.
2) Угол ACB – тупой.



3) Угол ABC – тупой.
4) Угол BAC – тупой.
Случаи, когда один из углов ABC, BAC, ACB – прямой, невозможны (почему?).

Замечание. Другое решение может быть основано на следующей ключевой (базовой, опорной) задаче:

• *Высоты остроугольного треугольника являются биссектрисами его ортотреугольника (треугольник, образованный основаниями высот).* (докажите)

Ответ: $45^\circ, 75^\circ, 60^\circ$ или $135^\circ, 15^\circ, 30^\circ$ или $120^\circ, 15^\circ, 45^\circ$ или $105^\circ, 30^\circ, 45^\circ$.

Пример 37. (2010) Точки D и E – основания высот непрямоугольного треугольника ABC, проведенных из вершин A и C соответственно. Известно, что $\frac{DE}{AC} = k$, $BC = a$ и $AB = b$. Найдите сторону AC.

• *Пусть в треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1. Тогда треугольник A_1BC_1 подобен данному с коэффициентом подобия, равным* $|\cos B|$. (докажите)

Решение. Из точек D и E сторона AC видна под прямым углом, значит, эти точки лежат на окружности с диаметром AC. Обозначим $\angle ABC = \alpha$.

1) Если треугольник ABC остроугольный, то основания высот AD и CE лежат на сторонах треугольника. Тогда четырехугольник $AEDC$ - вписанный, поэтому

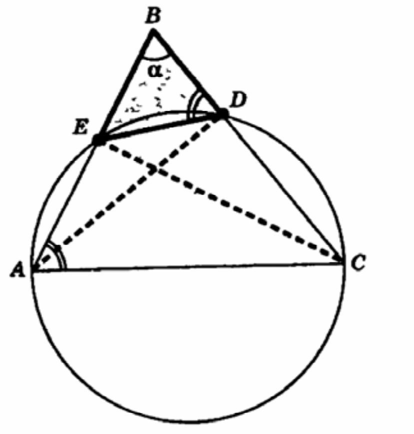
$$\angle BDE = 180^\circ - \angle CDE = \angle CAE = \angle CAB.$$

Треугольники EDB и CAB подобны (по двум углам) с коэффициентом

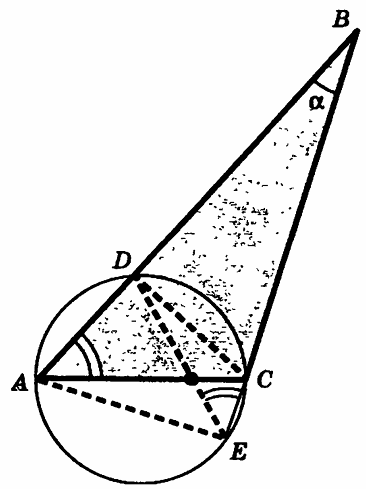
$$\frac{DE}{AC} = \frac{BE}{BC} = \cos\alpha,$$

т.е. $\cos\alpha = k$. Тогда по теореме косинусов

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC\cos\alpha =$$
$$= b^2 + a^2 - 2abk.$$



2) Пусть ACB – тупой угол.
Тогда четырехугольник $AECD$ вписанный, и аналогично предыдущему получаем: $\cos\alpha = k$ и $AC^2 = b^2 + a^2 - 2abk$.



3) Пусть CAB – тупой угол. Аналогичные рассуждения.

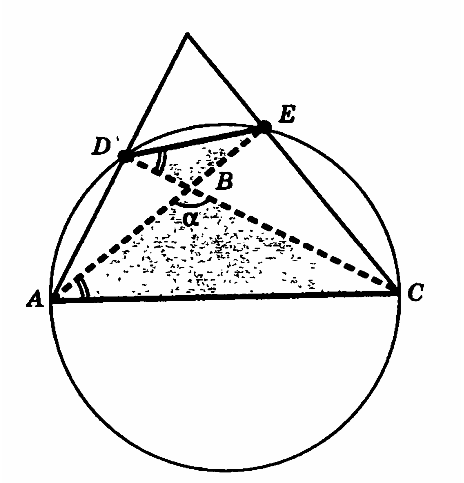
4) Пусть ABC – тупой угол. Тогда основания высот AD и CE лежат на продолжениях сторон BC и AB. Вписанные углы CDE и CAE опираются на одну и ту же дугу, поэтому $\angle BDE = \angle CDE = \angle CAE = \angle CAB$.

Треугольники EDB и CAB подобны (по двум углам) с коэффициентом

$$\frac{DE}{AC} = \frac{BD}{AB} = \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha,$$

т.е. $\cos\alpha = k$.

Тогда $AC^2 = a^2 + b^2 + 2abk$.



Ответ: $\sqrt{a^2+b^2-2abk}$, $\sqrt{a^2+b^2+2abk}$.

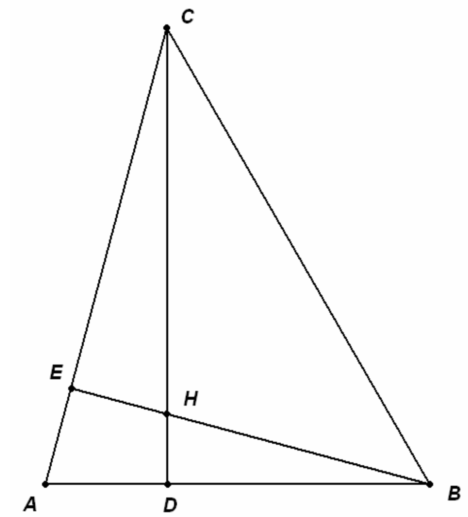
Пример 38. (2010) В треугольнике ABC угол A равен α, сторона BC равна a, H — точка пересечения высот. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BHC.

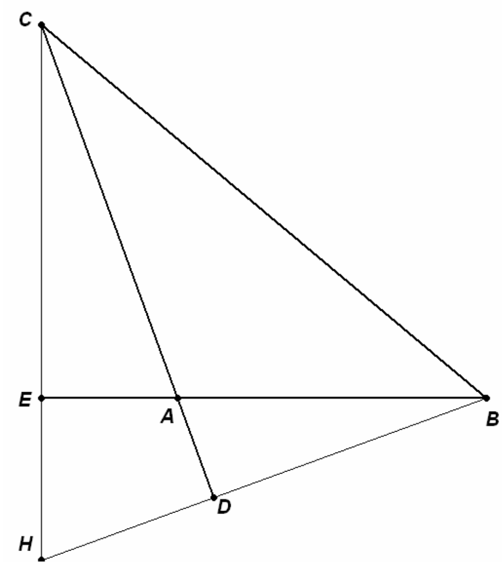
• *Если H – ортоцентр треугольника, то радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC, ABH, BCH, ACH, равны между собой.* (докажите)

Решение. Так как в четырехугольнике $ADHE$ углы E и D прямые, то $\angle A + \angle DHE = 180^\circ$. Отсюда получаем $\angle BHC = \angle DHE = 180^\circ - \angle A$. Радиус окружности, описанной около треугольника BHC, равен

$$\frac{BC}{2\sin(180^\circ - \angle A)} = \frac{BC}{2\sin\angle A} = \frac{a}{2\sin\alpha}.$$

Замечание. Отсюда следует, что радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC и BCH равны между собой.





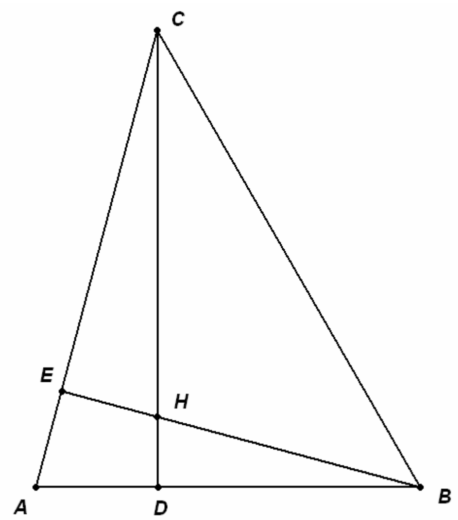
Ответ: $\dfrac{a}{2\sin\alpha}$.

Пример 39. (2010) Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H. Известно, что отрезок CH равен радиусу окружности, описанной около треугольника. Найдите угол ACB.

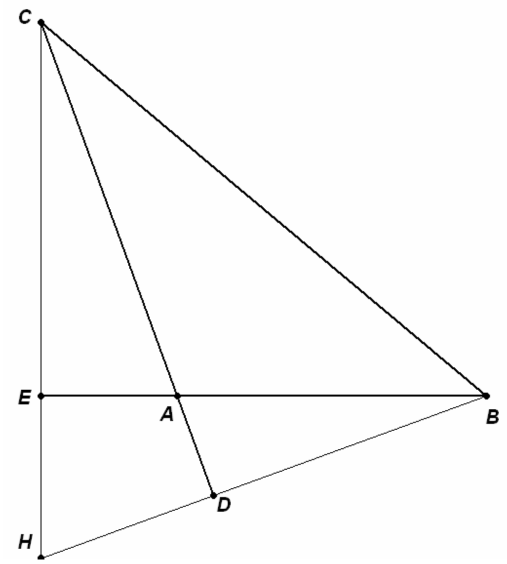
Решение. Пусть R – радиус окружности, описанной около треугольника ABC. Так как радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC и BCH равны между собой, то для треугольника BCH имеем $CH = 2R\sin\angle HBC$ или $R = 2R\sin\angle HBC$. Отсюда $\sin\angle HBC = \dfrac{1}{2}$.

Значит, $\angle HBC = 30^\circ$ или $\angle HBC = 150^\circ$.

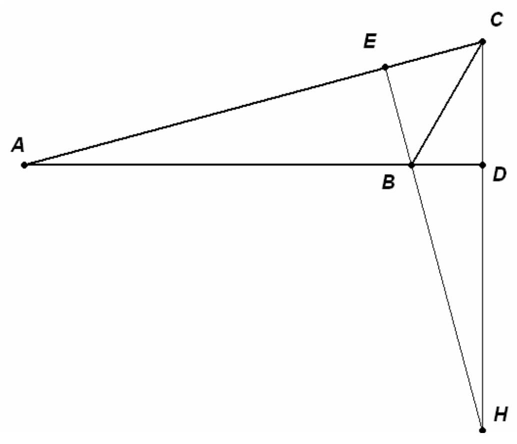
1) Если треугольник ABC – остроугольный, то из треугольника BEC находим $\angle C = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.



2) Если в треугольнике ABC угол A – тупой, то $\angle HBC = 30^\circ$ (в треугольнике DBC угол D прямой, а угол DBC может быть только острым). Из треугольника DBC находим $\angle C = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.

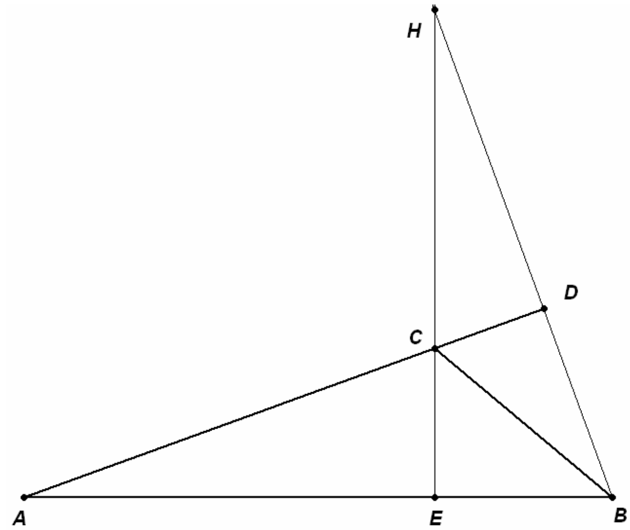


3) Если в треугольнике ABC угол B – тупой, то $\angle HBC = 150^\circ$ (почему этот угол тупой?) и $\angle CBE = 30^\circ$. Из треугольника CBE находим $\angle C = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.



4) Если в треугольнике ABC угол C – тупой, то $\angle HBC = 30^\circ$ (почему этот угол острый?). Из треугольника CBD находим $\angle BCD = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.

Тогда $\angle ACB = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.



Ответ: 60° или 120°.

Окружность и треугольник

Пример 40. (2010) В треугольнике ABC угол A равен α, сторона BC равна a, J — точка пересечения биссектрис. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BJC.

• *Если O – центр окружности, вписанной в треугольник ABC, то выполняются равенства:*

$\angle AOB = \dfrac{\angle C}{2} + 90^\circ$; $\angle AOC = \dfrac{\angle B}{2} + 90^\circ$;

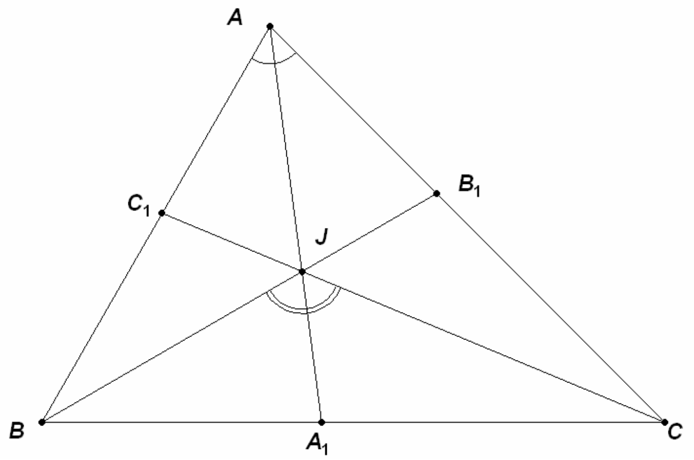
$\angle COB = \dfrac{\angle A}{2} + 90^\circ$.

Решение. Так как $\angle B + \angle C = 180^\circ - \angle A$,

то $\angle BJC = 180^\circ - \dfrac{\angle B + \angle C}{2} = \dfrac{\angle A}{2} + 90^\circ$.

Тогда радиус окружности, описанной около треугольника BJC, равен

$$R = \frac{BC}{2\sin \angle BJC} = \frac{a}{2\sin\left(\dfrac{\alpha}{2} + 90^\circ\right)} = \frac{a}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}}.$$



Ответ: $\dfrac{a}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}}$.

Пример 41. (2010) В треугольнике ABC проведены высоты BM и CN, O — центр вписанной окружности. Известно, что $BC = 24$, $MN = 12$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BOC.

Решение. 1) Треугольник AMN подобен треугольнику ABC с коэффициентом подобия $k = \dfrac{MN}{BC} = \dfrac{12}{24} = \dfrac{1}{2} = |\cos A|$.

Отсюда $\angle A = 60^\circ$ или $\angle A = 120^\circ$.

В примере 40 имеется соотношение $\angle COB = \dfrac{\angle A}{2} + 90^\circ$.

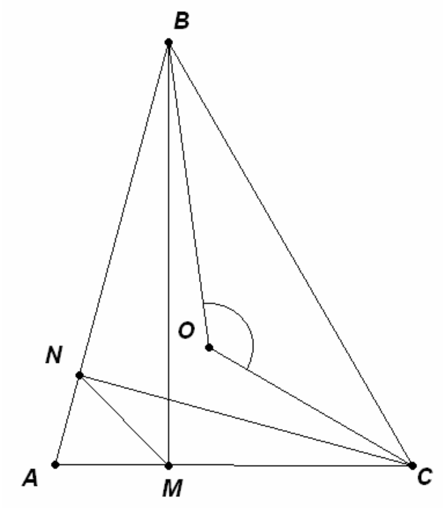
Значит $\sin\angle COB = \sin\left(\dfrac{60^\circ}{2} + 90^\circ\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

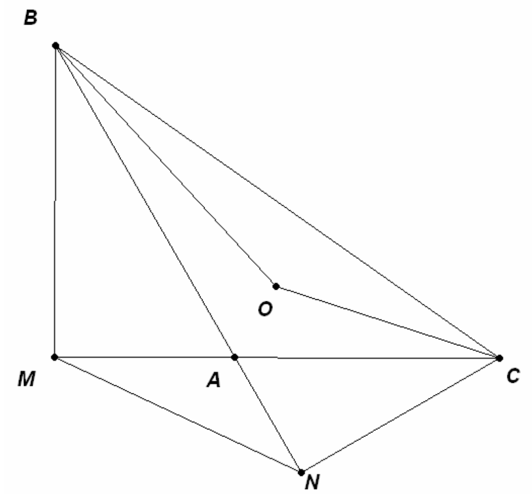
или $\sin\angle COB = \sin\left(\dfrac{120^\circ}{2} + 90^\circ\right) = \dfrac{1}{2}$.

Используем следствие из обобщенной теоремы синусов: $R = \dfrac{BC}{2\sin\angle COB}$.

Отсюда получаем $R = \dfrac{24}{\sqrt{3}} = 8\sqrt{3}$

или $R = \dfrac{24}{1} = 24$.





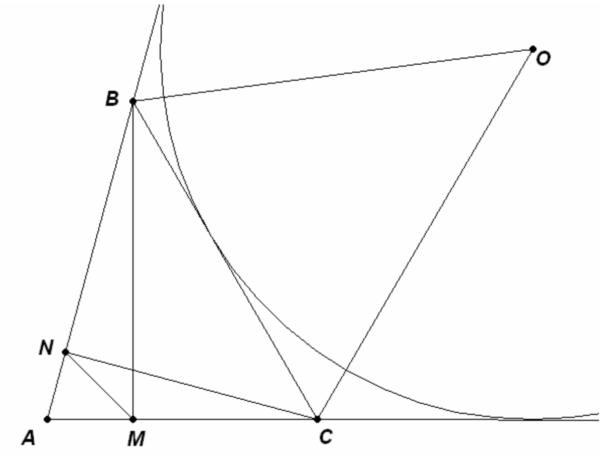
Ответ: $8\sqrt{3}$ или 24.

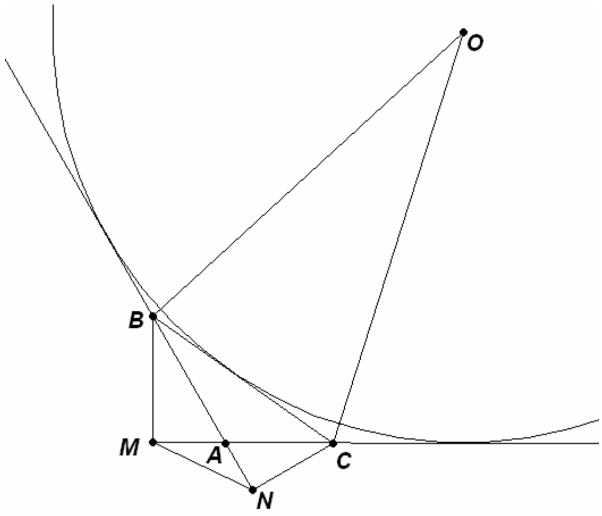
Пример 42. (2010) В треугольнике ABC проведены высоты BM и CN, O - центр окружности, касающейся стороны BC и продолжений сторон AB и AC. Известно, что $BC = 12$, $MN = 6$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BOC.

• *Если O – центр вневписанной окружности, касающейся стороны BC и продолжений сторон AB и AC треугольника ABC, то выполняются равенство:* $\angle COB = 90^\circ - \dfrac{\angle A}{2}$.

(докажите, см. пример 40)

Решение проведите самостоятельно (аналогично решению примера 41).





Ответ: $4\sqrt{3}$ или 12.

Параллелограмм

• *При проведении биссектрисы угла параллелограмма образуется равнобедренный треугольник.*

• *Биссектрисы смежных углов параллелограмма перпендикулярны, а биссектрисы противоположных углов параллельны или лежат на одной прямой.*

Пример 43. (2010) В параллелограмме со сторонами a и b и острым углом α проведены биссектрисы четырех углов. Найдите площадь четырехугольника, ограниченного этими биссектрисами.

Решение. Пусть проведены биссектрисы AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 в параллелограмме $ABCD$.

Так как противоположные углы параллелограмма $ABCD$ с соответственно параллельными сторонами, то биссектрисы этих углов параллельны, а потому четырехугольник $PQRS$ - параллелограмм. Далее,

$\angle APB = 180^\circ - (\angle BAP + \angle ABP) =$

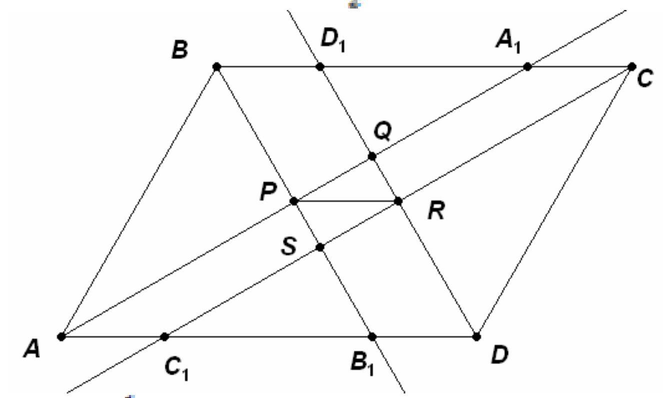
$= 180^\circ - \dfrac{1}{2}(\angle BAD + \angle ABC) = 180^\circ - 90^\circ$.

Таким образом, $PQRS$ – прямоугольник. Треугольники BAB_1 и CDC_1 равнобедренные, так как у них биссектрисы перпендикулярны основаниям. Поэтому $BP = B_1P$, $D_1R = DR$, а следовательно, $PR \parallel AD$. Итак, четырехугольник $PRDB_1$ - параллелограмм, а поэтому

$PR = B_1D = AD - AB_1 = AD - AB$.

В прямоугольнике $PQRS$ диагонали равны $a - b$ или $b - a$, и образуют угол α (так как они попарно параллельны сторонам исходного параллелограмма).

Искомая площадь равна $\frac{1}{2}(a-b)^2 \sin\alpha$.



Ответ: $\frac{1}{2}(a-b)^2 \sin\alpha$.

Ромб

Пример 44. (2010) Найдите площадь общей части двух ромбов, диагонали которых равны 2 и 3, а один из ромбов получен из другого поворотом на 90° вокруг его центра.

Решение. Пусть $ABCD$ и $A'B'C'D'$ имеющиеся ромбы, причем $BD = 3$, $AC = 2$.

Тогда $OB = OB' = 1{,}5$, $AO = C'O = 1$, $BC' = AB' = 0{,}5$.

$\angle AKB' = \angle BKC'$ и $\angle AB'K = \angle KBC'$.

Тогда $\angle B'AK = \angle BC'K$ и $\Delta B'AK = \Delta BC'K$ по стороне и двум прилежащим углам. Следовательно, $AK = C'K$ и $\Delta AKO = \Delta C'KO$ по трем сторонам. Тогда искомая площадь

$S = 4S_{OAKC'} = 8S_{OKC'}$.

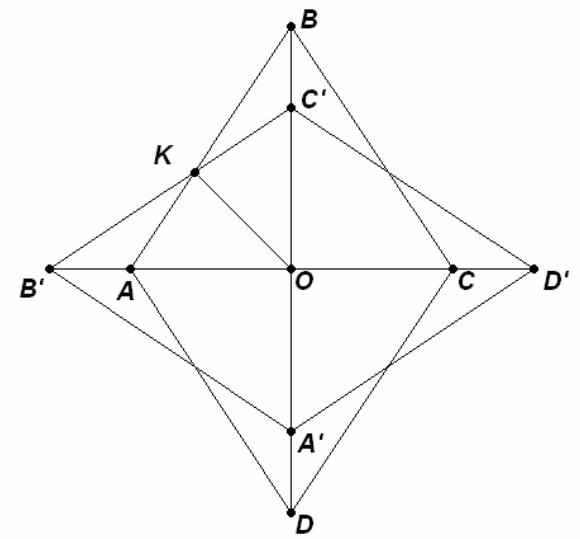
Так как $OC' = 2BC'$ и треугольники $C'KO$ и $BC'K$ имеют равные высоты, то

$S_{OKC'} = 2S_{BKC'}$.

Пусть $S_{BKC'} = x$, тогда $S_{AOB} = 5x$.

Но $S_{AOB}=\frac{1}{2}AO\cdot OB=\frac{1,5}{2}=5x$. Отсюда $x=\frac{1,5}{10}$.

$S=8S_{OKC'}=16x=16\cdot\frac{1,5}{10}=\frac{12}{5}$.



Ответ: $\frac{12}{5}$.

Прямоугольник

Пример 45. (2010) Сторона AD прямоугольника $ABCD$ в три раза больше стороны AB; точки M и N делят AD на три равные части. Найдите $\sin(\angle AMB+\angle ANB+\angle ADB)$.

Решение. Обозначим $\angle AMB=\alpha$, $\angle ANB=\beta$, $\angle ADB=\gamma$.

Тогда $tg\alpha=\frac{AB}{AM}=1$, $tg\beta=\frac{AB}{AN}=\frac{1}{2}$,

$tg\gamma=\frac{AB}{AD}=\frac{1}{3}$.

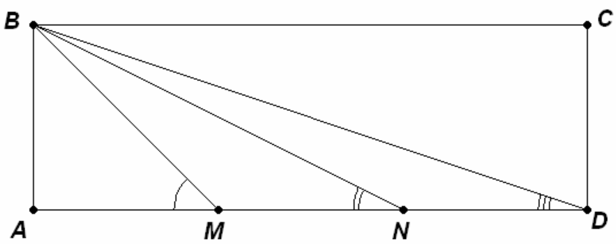
Далее $tg(\beta+\gamma)=\frac{tg\beta+tg\gamma}{1-tg\beta\cdot tg\gamma}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=1$,

т.е. $\beta+\gamma=45^\circ$.

Из прямоугольного равнобедренного треугольника ABM имеем $\alpha=45^\circ$.

Значит, $\alpha+\beta+\gamma=90^\circ$,

$\sin(\alpha+\beta+\gamma)=\sin 90^\circ=1$.



Ответ: 1.

Трапеция

Пример 46. (2010) В трапеции $ABCD$ биссектриса угла A пересекает боковую сторону BC в точке E. Найдите площадь треугольника ABE, если площадь трапеции равна S, $AB=a$, $AD=b$, $CD=c$ ($c<a$).

Решение. 1) Из формулы $S=\frac{a+c}{2}\cdot h$

находим высоту трапеции $h=\frac{2S}{a+c}$.

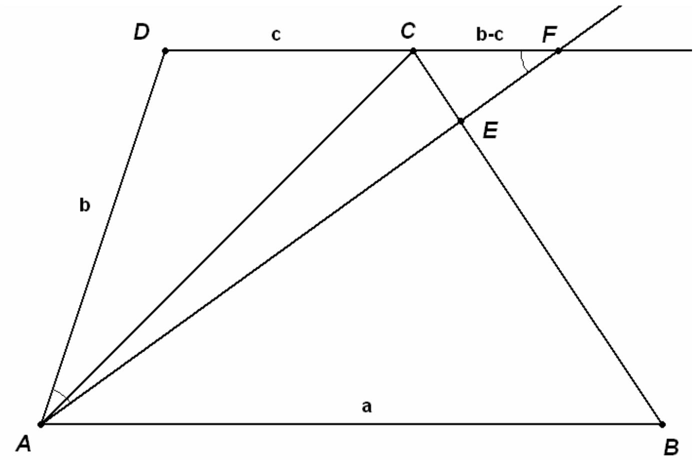
Тогда $S_{ABC}=\frac{1}{2}ah=\frac{aS}{a+c}$.

2) Пусть AF – биссектриса угла A. Треугольник ADF – равнобедренный (докажите). Тогда $CF=b-c$.

3) Треугольники ABE и FCE подобны (докажите). Тогда $\frac{BE}{CE}=\frac{AB}{CF}=\frac{a}{b-c}$, $\frac{BE}{BC}=\frac{a}{a+b-c}$.

4) Треугольники ABE и ABC имеют общую высоту, поэтому $\frac{S_{ABE}}{S_{ABC}}=\frac{BE}{BC}=\frac{a}{a+b-c}$

и $S_{ABE}=\frac{a}{a+b-c}\cdot\frac{aS}{a+c}=\frac{a^2S}{(a+c)(a+b-c)}$.

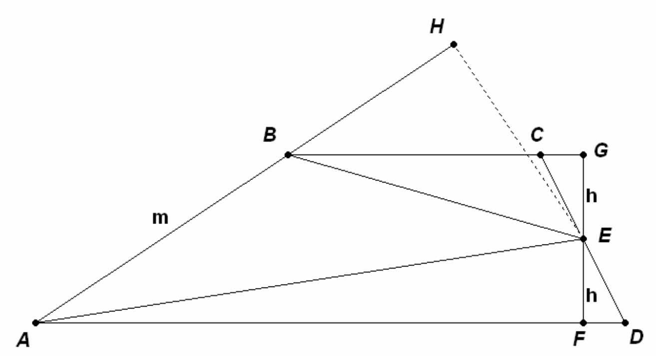


Ответ: $\frac{a^2S}{(a+c)(a+b-c)}$.

Пример 47. (2010) Боковая сторона AB трапеции $ABCD$ равна l, а расстояние от середины CD до прямой AB равно m. Найдите площадь трапеции.

Решение. Пусть в трапеции $ABCD$ высота равна $2h$, тогда $EG=EF=h$ (это следует из равенства прямоугольных треугольников EGC и

EFD). Обозначим $BC = a$, $AD = b$, тогда площадь трапеции *ABCD* равна $S = (a+b)h$. Сумма площадей треугольников *BCE* и *AED* равна $\frac{ah}{2} + \frac{bh}{2} = \frac{(a+b)h}{2} = \frac{S}{2}$. Следовательно, $S_{ABE} = \frac{S}{2}$. С другой стороны $S_{ABE} = \frac{ml}{2} = \frac{S}{2}$. Отсюда $S = ml$.



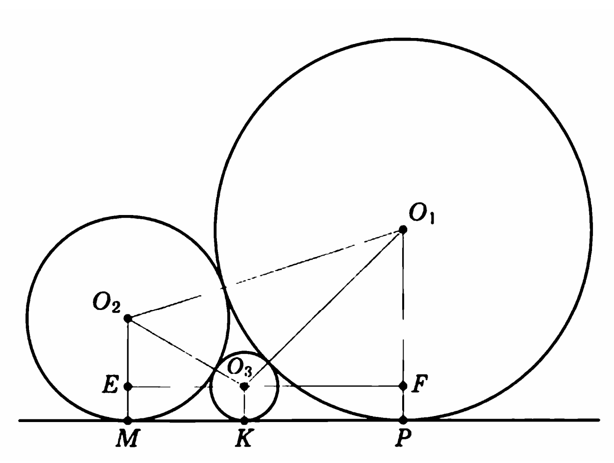
Ответ: *lm*.

Касающиеся окружности

Пример 48. (2010) Окружности радиусов 4 и 9 касаются внешним образом, лежат по одну сторону от некоторой прямой и касаются этой прямой. Найдите радиус окружности, касающейся каждой из двух данных и той же прямой.

- *Отрезок общей внешней касательной к двум касающимся окружностям радиусов r и R равен* $2\sqrt{Rr}$.

Решение. Рассмотрим первый случай касания искомой окружности с центром O_3 и двух данных окружностей.

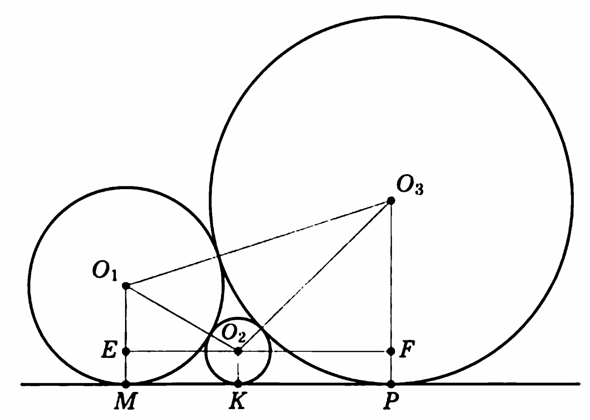


Тогда $MP = MK + KP$, или

$2\sqrt{r_1 r_2} = 2\sqrt{r_3 r_2} + 2\sqrt{r_1 r_3}$, откуда

$\sqrt{r_3} = \frac{\sqrt{r_1 r_2}}{\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2}} = 1{,}2$. Отсюда $r_3 = 1{,}44$.

Второй случай рассмотрите самостоятельно.



Ответ: 1,44 или 36.

Пример 49. (2010) Окружности с центрами *O* и *B* радиуса *OB* пересекаются в точке *C*. Радиус *OA* окружности с центром *O* перпендикулярен *OB*, причем точки *A* и *C* лежат по одну сторону от прямой *OB*. Окружность S_1 касается меньших дуг *AB* и *OC* этих окружностей, а также прямой *OA*, а окружность S_2 касается окружности с центром *B*, прямой *OA* и окружности S_1. Найдите отношение радиуса окружности S_1 к радиусу окружности S_2.

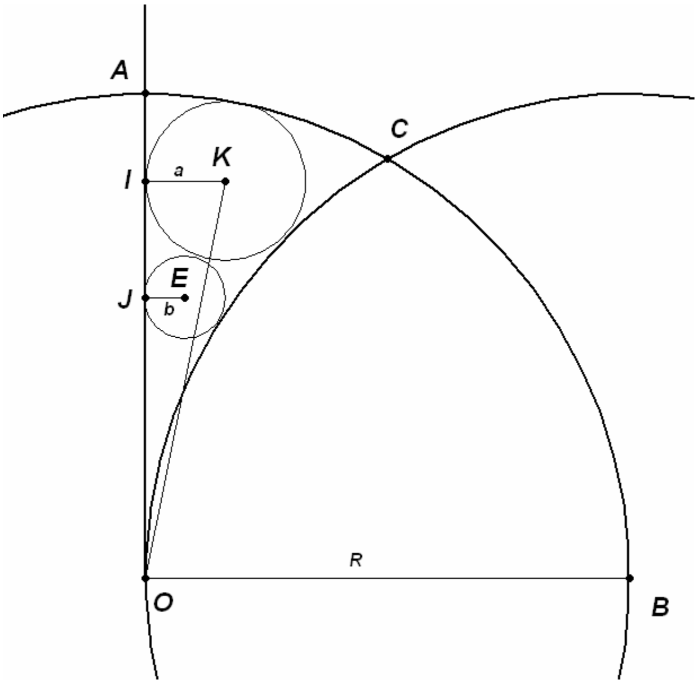
Решение. Так как окружность S_1 радиуса *a* и окружность с центром *B* и радиуса *R* касаются друг друга и общей прямой *OA*, то имеем

$OI = 2\sqrt{Ra}$, $OK = R - a$.

Далее используем теорему Пифагора в треугольнике *OKI*: $(R-a)^2 = a^2 + \left(2\sqrt{Ra}\right)^2$.

Отсюда получаем $R = 6a$.

Рассмотрим первый случай касания окружности S_2 радиуса *b*.



Тогда $OI = OJ + JI$, или

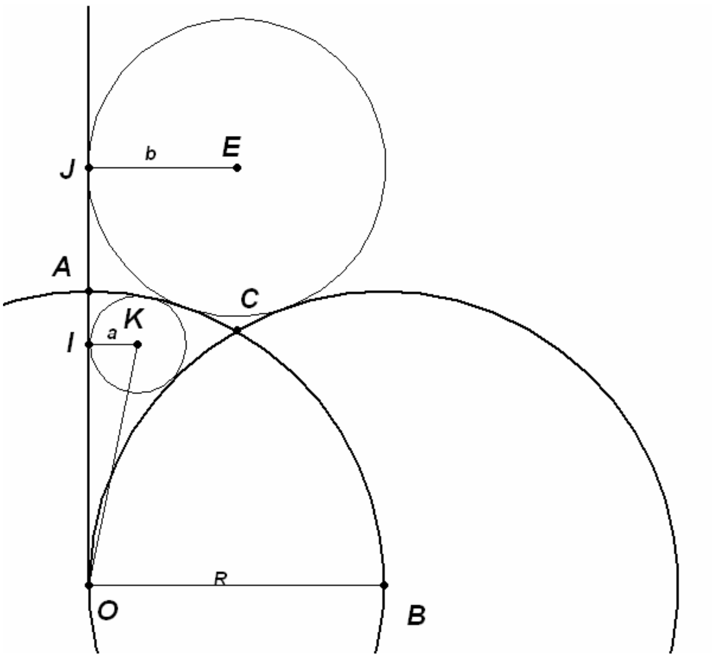
$2\sqrt{aR} = 2\sqrt{bR} + 2\sqrt{ab}$, откуда

$\sqrt{6a^2} = \sqrt{6ab} + \sqrt{ab}$, $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{6}+1}{\sqrt{6}}$,

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{7+2\sqrt{6}}{6}$.

Для второго случая имеем $OI = OJ + JI$,

$2\sqrt{bR} = 2\sqrt{aR} + 2\sqrt{ab}$. (вычисления проведите самостоятельно)



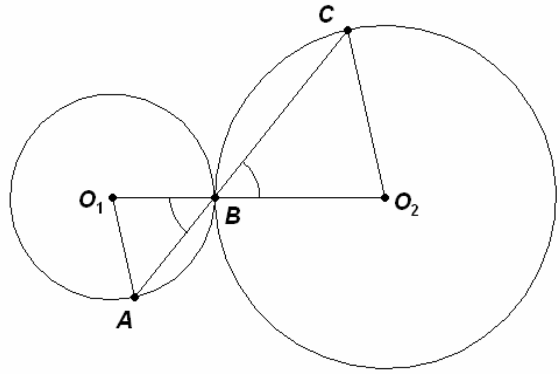
Ответ: $\dfrac{7 \pm 2\sqrt{6}}{6}$.

Пример 50. (2010) Окружности радиусов 2 и 4 касаются в точке B. Через точку B проведена прямая, пересекающая второй раз меньшую окружность в точке A, а большую – в точке C. Известно, что $AC = 3\sqrt{2}$. Найдите BC.

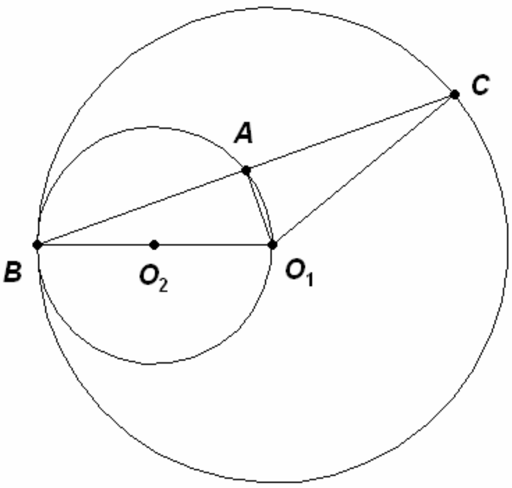
Решение. 1) Окружности касаются внешним образом.

Так как треугольники ABO_1 и CBO_2 подобны (докажите), то $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{BO_1}{BO_2} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$.

Отсюда $BC = \dfrac{2}{3}AC = \dfrac{2}{3} \cdot 3\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.



2) Окружности касаются внутренним образом. Рассмотрите этот случай самостоятельно и докажите, что он невозможен при исходных числовых данных.



Ответ: $2\sqrt{2}$.

Упражнения

(одним списком)

Медианы треугольника

1. (2010) Найдите площадь треугольника ABC, если $AC = 3$, $BC = 4$, а медианы, проведенные из вершин A и B, перпендикулярны.
Ответ: $\sqrt{11}$.
2. (2010) Медиана BM треугольника ABC равна его высоте AH. Найдите угол MBC.
Ответ: 30° или 150°.

Биссектрисы треугольника

3. (2010) В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и CE. Найдите длину отрезка DE, если $AC = 6$, $AE = 2$, $CD = 3$.(01.10.09)
Ответ: $\sqrt{5{,}8}$.

Высоты треугольника

4. (2010) Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H. Известно, что $CH = AB$. Найдите угол ACB.
Ответ: 45° или 135°.
5. (2010) Точки A_1, A_2, A_3, — основания высот треугольника ABC. Углы треугольника $A_1A_2A_3$ равны $90°$, $60°$ и $30°$. Найдите углы треугольника ABC.
Ответ: $45^\circ, 75^\circ, 60^\circ$ или $135^\circ, 15^\circ, 30^\circ$ или $120^\circ, 15^\circ, 45^\circ$ или $105^\circ, 30^\circ, 45^\circ$.
6. (2010) Точки D и E – основания высот непрямоугольного треугольника ABC, проведенных из вершин A и C соответственно. Известно, что $\frac{DE}{AC} = k$, $BC = a$ и $AB = b$. Найдите сторону AC.
Ответ: $\sqrt{a^2 + b^2 - 2abk}$, $\sqrt{a^2 + b^2 + 2abk}$.

Отношение отрезков и площадей

7. (2010) В треугольнике ABC на стороне BC выбрана точка D так, что $BD:DC = 1:2$. Медиана CE пересекает отрезок AD в точке F. Какую часть площади треугольника ABC составляет площадь треугольника AEF?
Ответ: 0,1.
8. (2010) На сторонах выпуклого четырехугольника $ABCD$, площадь которого равна единице, взяты точки $K \in AB$, $L \in BC$, $M \in CD$ и $N \in DA$. При этом $\frac{AK}{KB} = 2$, $\frac{BL}{LC} = \frac{1}{3}$, $\frac{CM}{MD} = 1$, $\frac{DN}{NA} = \frac{1}{5}$. Найдите площадь шестиугольника $AKLCMN$.
Ответ: $\frac{11}{12}$.
9. (2010) В треугольнике ABC, площадь которого равна S, биссектриса CE и медиана BD пересекаются в точке F. Найдите площадь четырехугольника $ADEF$, если $BC = a$, $AC = b$.
Ответ: $\frac{Sb(3a+b)}{2(a+b)(2a+b)}$

Угол и окружность

10. (2010) На стороне AC угла ACB, равного $45°$, взята такая точка D, что $CD = AD = 2$. Найдите радиус окружности, проходящей через точки A и D и касающейся прямой BC.
Ответ: $\sqrt{2}$ или $5\sqrt{2}$.
11. (2010) На стороне BA угла ABC, равного $30°$, взята такая точка D, что $AD = 2$ и $BD = 1$. Найдите радиус окружности, проходящей через точки A, D и касающейся прямой BC.
Ответ: 1 или 7.
12. (2010) Прямая отсекает от сторон прямого угла отрезки 3 и 4. Найдите радиус окружности, касающейся этой прямой и сторон угла.
Ответ: 1 или 6.
13. (2010) Прямая отсекает от сторон прямого угла отрезки 5 и 12. Найдите радиус окружности, касающейся этой прямой и сторон угла.
Ответ: 2 или 15.

Треугольник и окружность

14. (2010) Около треугольника ABC описана окружность с центром O, угол AOC равен $60°$. В треугольник ABC вписана окружность с центром M. Найдите угол AMC.
Ответ: 165° или 105°.
15. (2010) Треугольник ABC вписан в окружность радиуса 12. Известно, что $AB = 6$ и $BC = 4$. Найдите AC.
Ответ: $\sqrt{35} \pm \sqrt{15}$.
16. (2010) В треугольнике ABC проведены высоты BM и CN, O — центр вписанной окружности. Известно, что $BC = 24$, $MN = 12$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BOC.
Ответ: $8\sqrt{3}$ или 24.
17. (2010) Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H. Известно, что отрезок CH равен радиусу окружности, описанной около треугольника. Найдите угол ACB.
Ответ: 60° или 120°.
18. (2010) В треугольнике ABC проведены высоты BM и CN, O - центр окружности, касающейся стороны BC и продолжений сторон

AB и AC. Известно, что $BC = 12$, $MN = 6$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BOC.

Ответ: $4\sqrt{3}$ или 12.

19. (2010) В треугольнике ABC угол A равен α, сторона BC равна a, H — точка пересечения высот. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BHC.

Ответ: $\dfrac{a}{2\sin\alpha}$.

20. (2010) В треугольнике ABC угол A равен α, сторона BC равна a, J — точка пересечения биссектрис. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BJC.

Ответ: $\dfrac{a}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}}$.

21. (2010) Вершина равнобедренного треугольника с боковой стороной 5 и основанием 6 служит центром данной окружности радиуса 2. Найдите радиус окружности, касающейся данной и проходящей через концы основания треугольника.

Ответ: $\dfrac{13}{4}$ или $\dfrac{15}{4}$.

22. (2010) Вершина равнобедренного треугольника с боковой стороной 5 и основанием 8 служит центром данной окружности радиуса 2. Найдите радиус окружности, касающейся данной и проходящей через концы основания треугольника.

Ответ: $\dfrac{17}{2}$ или $\dfrac{41}{10}$.

Параллелограмм

23. (2010) В параллелограмме $ABCD$ известны стороны $AB = a$, $BC = b$ и $\angle BAD = \alpha$. Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников BCD и DAB.

Ответ: $\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}\,|ctg\alpha|$.

24. (2010) Дан параллелограмм $ABCD$, $AB = 2$, $BC = 3$, $\angle A = 60^\circ$. Окружность с центром в точке O касается биссектрисы угла D и двух сторон параллелограмма, исходящих из вершины одного его острого угла. Найдите площадь четырехугольника $ABOD$.

Ответ: $\frac{5\sqrt{3}}{4}$, $\frac{13\sqrt{3}}{6}$.

25. (2010) Дан параллелограмм $ABCD$, $AB = 3$, $BC = 5$, $\angle A = 60^\circ$. Окружность с центром в точке O касается биссектрисы угла D и двух сторон параллелограмма, исходящих из вершины одного его острого угла. Найдите площадь четырехугольника $ABOD$.

Ответ: $\frac{10\sqrt{3}}{3}$, $\frac{11\sqrt{3}}{2}$.

26. (2010) В параллелограмме со сторонами a и b и острым углом α проведены биссектрисы четырех углов. Найдите площадь четырехугольника, ограниченного этими биссектрисами.

Ответ: $\frac{1}{2}(a-b)^2\sin\alpha$.

Ромб

27. (2010) Найдите площадь общей части двух ромбов, диагонали которых равны 2 и 3, а один из ромбов получен из другого поворотом на 90° вокруг его центра.

Ответ: $\frac{12}{5}$.

Прямоугольник

28. (2010) Сторона AD прямоугольника $ABCD$ в три раза больше стороны AB; точки M и N делят AD на три равные части. Найдите

$$\sin(\angle AMB + \angle ANB + \angle ADB).$$

Ответ: 1.

29. (2010) В прямоугольнике $ABCD$ $AB = 2$, $BC = \sqrt{3}$. Точка E на прямой AB выбрана так, что $\angle AED = \angle DEC$. Найдите AE.

Ответ: 1 или 3.

Квадрат

30. (2010) Через середину стороны AB квадрата $ABCD$ проведена прямая, пересекающая прямые CD и AD в точках M и T соответственно и образующая с прямой AB угол α, $tg\alpha = 3$. Найдите площадь треугольника BMT, если сторона квадрата $ABCD$ равна 4.

Ответ: 2 или 10.

Трапеция

31. (2010) В трапеции $ABCD$ известны боковые стороны $AB = 27$, $CD = 28$ и верхнее основание $BC = 5$. Известно, что $\cos\angle BCD = -\frac{2}{7}$. Найдите AC.

Ответ: 28 или $2\sqrt{181}$.

32. (2010) Основания трапеции равны a и b. Прямая, параллельная основаниям, разбивает трапецию на две трапеции, площади которых относятся как 2:3. Найдите длину отрезка этой прямой, заключенного внутри трапеции.

Ответ: $\sqrt{\dfrac{2a^2+3b^2}{5}}$ или $\sqrt{\dfrac{3a^2+2b^2}{5}}$.

33. (2010) На боковых сторонах AB и CD трапеции с основаниями AD и BC отмечены точки P и Q соответственно, причем $PQ \parallel AD$. Прямая PQ разбивает трапецию на две трапеции, площади которых относятся как 1:2. Найдите PQ, если $AD = a$ и $BC = b$.

Ответ: $\sqrt{\dfrac{2a^2+b^2}{3}}$ или $\sqrt{\dfrac{a^2+2b^2}{3}}$.

34. (2010) Боковая сторона AB трапеции $ABCD$ равна l, а расстояние от середины CD до прямой AB равно m. Найдите площадь трапеции.

Ответ: lm.

35. (2010) Диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке E. Найдите площадь трапеции, если площадь треугольника AED равна 9, а точка E делит одну из диагоналей в отношении 1:3.

Ответ: 16; 48; 144.

36. (2010) Дана трапеция $ABCD$ с боковыми сторонами $AB = 36$, $CD = 34$ и верхним основанием $BC = 10$. Известно, что $\cos\angle ABC = -\frac{1}{3}$. Найдите BD.

Ответ: 36 или $8\sqrt{19}$.

37. (2010) В трапеции $ABCD$ биссектриса угла A пересекает боковую сторону BC в точке E. Найдите площадь треугольника ABE, если площадь трапеции равна S, $AB = a$, $AD = b$, $CD = c$ ($c < a$).

Ответ: $\dfrac{a^2S}{(a+c)(a+b-c)}$.

Трапеция и окружность

38. (2010) Трапеция с основаниями 14 и 40 вписана в окружность радиуса 25. Найдите высоту

Ответ: 39 или 9.

39. (2010) Трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC вписана в окружность с центром O. Найдите высоту трапеции, если ее средняя линия равна 3 и $\sin\angle AOB = \frac{3}{5}$.

Ответ: 9 или 1.

40. (2010) Дана трапеция $ABCD$, основания которой $BC = 44$, $AD = 100$, $AB = CD = 35$. Окружность, касающаяся прямых AD и AC, касается стороны CD в точке K. Найдите длину отрезка CK.

Ответ: 5 или 30.

41. (2010) Около трапеции $ABCD$ описана окружность радиуса 6 с центром на основании AD. Найдите площадь трапеции, если основание BC равно 4.

Ответ: $32\sqrt{2}$.

Непересекающиеся окружности

42. (2010) Прямая касается окружностей радиусов R и r в точках A и B. Известно, что расстояние между центрами равно a, причем $r < R$ и $r + R < a$. Найдите AB.

Ответ: $\sqrt{a^2-(R-r)^2}$ или $\sqrt{a^2-(R+r)^2}$.

43. Найдите длину отрезка общей касательной к двум окружностям, заключенного между точками касания, если радиусы окружностей равны 23 и 7, а расстояние между центрами окружностей равно 34.

Ответ: 30 или 16.

44. Найдите длину отрезка общей касательной к двум окружностям, заключенного между точками касания, если радиусы окружностей равны 31 и 17, а расстояние между центрами окружностей равно 50.

Ответ: 48 или 14.

Касающиеся окружности

45. (2010) Окружности радиусов 2 и 4 касаются в точке B. Через точку B проведена прямая, пересекающая второй раз меньшую окружность в точке A, а большую – в точке C. Известно, что $AC = 3\sqrt{2}$. Найдите BC.

Ответ: $2\sqrt{2}$.

46. (2010) Точка O – центр окружности радиуса 2. На продолжении радиуса OM взята точка A. Через точку A проведена прямая, касающаяся окружности в точке K. Известно, что $\angle OAK = 60^\circ$. Найдите радиус окружности, вписанной в угол OAK и касающейся данной окружности внешним образом.

Ответ: $2 \pm \frac{4}{3}\sqrt{2}$

47. (2010) Дана окружность радиуса 2 с центром O. Хорда AB пересекает радиус OC в точке D, причем $\angle CDA = 120^\circ$. Найдите радиус окружности, вписанной в угол ADC и касающейся дуги AC, если $OD = \sqrt{3}$.

Ответ: $2\sqrt{21}-9$ или $3+2\sqrt{3}$.

48. (2010) Окружности радиусов 4 и 9 касаются внешним образом, лежат по одну сторону от некоторой прямой и касаются этой прямой. Найдите радиус окружности, касающейся каждой из двух данных и той же прямой.
Ответ: 1,44 или 36.
49. (2010) Окружности S_1 и S_2 радиусов R и r $(R > r)$ соответственно касаются в точке A. Через точку B, лежащую на окружности S_1, проведена прямая, касающаяся окружности S_2 в точке M. Найдите BM, если известно, что $AB = a$.
Ответ: $a\sqrt{1 \pm \frac{r}{R}}$

Пересекающиеся окружности

50. (2010) Окружности радиусов 10 и 17 пересекаются в точках A и B. Найдите расстояние между центрами окружностей, если $AB = 16$.
Ответ: 21 или 9.
51. (2010) Окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Известно, что $\angle AO_1B = 90^\circ$, $\angle AO_2B = 60^\circ$, $O_1O_2 = a$. Найдите радиусы окружностей.
Ответ: $\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}, \frac{2a}{\sqrt{3}+1}$ или $\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}, \frac{2a}{\sqrt{3}-1}$.
52. (2010) Окружности с центрами O и B радиуса OB пересекаются в точке C. Радиус OA окружности с центром O перпендикулярен OB, причем точки A и C лежат по одну сторону от прямой OB. Окружность S_1 касается меньших дуг AB и OC этих окружностей, а также прямой OA, а окружность S_2 касается окружности с центром B, прямой OA и окружности S_1. Найдите отношение радиуса окружности S_1 к радиусу окружности S_2.
Ответ: $\frac{7\pm 2\sqrt{6}}{6}$

Источники

1. ЕГЭ. Математика. Тематическая тетрадь. 11 класс / И. В. Ященко, С. А. Шестаков, П. И. Захаров. – М.: МЦНМО, Издательство «Экзамен», 2010.
2. Единый государственный экзамен 2010. Математика. Универсальные материалы для подготовки учащихся / ФИПИ – М.: Интеллект-Центр, 2010.
3. ЕГЭ 2010. Математика: Сборник тренировочных работ / Высоцкий И.Р., Захаров П.И., Панфёров В.С., Семёнов А.В., Сергеев И.Н., Смирнов В.А., Шестаков С.А., Ященко И.В. – М.: МЦНМО, 2009.
4. ЕГЭ 2010. Математика. Типовые тестовые задания /под ред. А. Л. Семенова, И. В. Ященко. – М.: Издательство «Экзамен», 2010.
5. Панферов В. С., Сергеев И. Н. Отличник ЕГЭ. Математика. Решение сложных задач; ФИПИ – М.: Ителлект-Центр, 2010.
6. Самое полное издание типовых вариантов реальных заданий ЕГЭ 2010: Математика /авт.-сост. И. Р. Высоцкий, Д. Д. Гущин, П. И. Захаров и др.; под ред. А. Л. Семенова, И. В. Ященко. – М.: АСТ: Астрель, 2009. – (Федеральный институт педагогических измерений).
7. Ященко И. В., Шестаков С. А., Захаров П. И. Подготовка к ЕГЭ по математике в 2010 году. Методические указания. – М.: МЦНМО, 2009.
8. www.mathege.ru - Математика ЕГЭ 2010 (открытый банк заданий)
9. www.alexlarin.narod.ru - сайт по оказанию информационной поддержки студентам и абитуриентам при подготовке к ЕГЭ, поступлению в ВУЗы и изучении различных разделов высшей математики.
10. www.egetrener.ru - видеоуроки Ольги Себедеш.
11. www.diary.ru

Замеченные опечатки в С3

● В задании № 2 вместо знака $\le$ должен быть знак $\ge$.