Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 а) Решите уравнение $4\cos^2 x - 8\sin x + 1 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

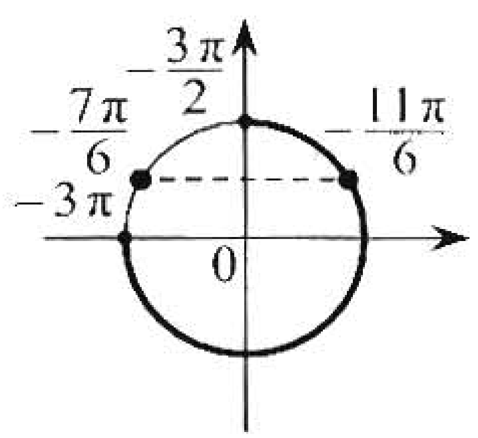
Решение.

а) Запишем уравнение в виде:

$$4 - 4\sin^2 x - 8\sin x + 1 = 0;\ 4\sin^2 x + 8\sin x - 5 = 0;\ (2\sin x + 5)(2\sin x - 1) = 0.$$

Значит, или $\sin x = -\frac{5}{2}$ — уравнение не имеет корней, или $\sin x = \frac{1}{2}$, откуда $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ или $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.



Получим число $-\frac{11\pi}{6}$.

Замечание. Отбор корней может быть обоснован и любым другим способом: с помощью графика, решения двойных неравенств и т.п.

Ответ: а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{11\pi}{6}$.

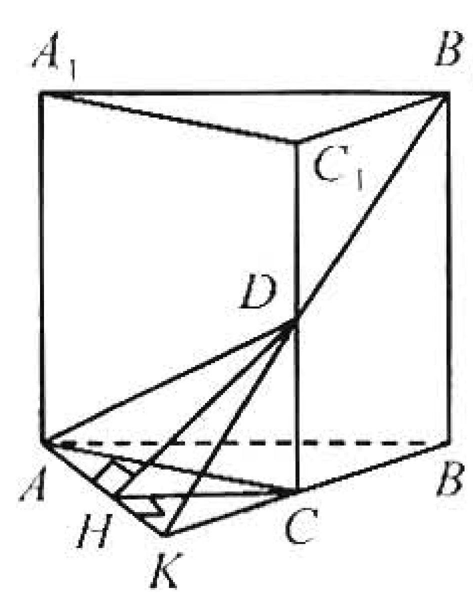
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C2 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 2, боковые рёбра равны 3, точка D — середина ребра CC_1. Найдите расстояние от вершины C до плоскости ADB_1.

Решение.

Прямая B_1D пересекает прямую BC в точке K. Плоскости ABC и ADB_1 пересекаются по прямой AK.

Из точки D опустим перпендикуляр DH на прямую AK, тогда отрезок CH (проекция DH) перпендикулярен прямой AK. Прямая AK перпендикулярна плоскости CDH, следовательно, плоскости ADB_1 и CDH перпендикулярны. Высота CM треугольника CDH перпендикулярна плоскости ADB_1, следовательно, CM — расстояние от точки C до плоскости ADB_1.



Точка D — середина ребра CC_1, поэтому $CD = DC_1 = \frac{3}{2}$.

Из равенства треугольников B_1C_1D и KCD получаем:

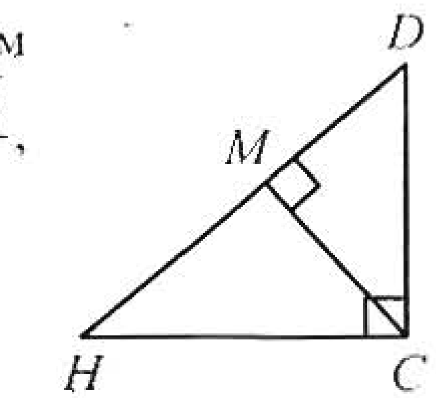
$$CK = B_1C_1 = 2.$$

В равнобедренном треугольнике ACK угол C равен $120°$, $AC = CK = 2$, высота CH является биссектрисой, откуда

$$CH = AC \cdot \cos 60° = 1.$$

В прямоугольном треугольнике CDH с прямым углом C: $CD = \frac{3}{2}$; $CH = 1$; $DH = \sqrt{CD^2 + CH^2} = \frac{\sqrt{13}}{2}$, откуда высота

$$CM = \frac{CD \cdot CH}{DH} = \frac{3\sqrt{13}}{13}.$$



Ответ: $\frac{3\sqrt{13}}{13}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 2 \cdot 3^{x+2} + 27 \cdot 3^{-x} \le 87, \\ \log_{3x} \frac{1}{27} \cdot \log_3 27x + 9 \ge 0. \end{cases}$$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы. Сделаем замену $y = 3^x$.

$$18y + \frac{27}{y} \le 87;\ \frac{18y^2 - 87y + 27}{y} \le 0;\ \frac{3(2y-9)(3y-1)}{y} \le 0;\ \left[\begin{array}{l} y < 0 \\ \frac{1}{3} \le y \le \frac{9}{2}. \end{array}\right.$$

Учитывая, что $3^x > 0$, получаем: $\frac{1}{3} \le 3^x \le \frac{9}{2}$, откуда находим решение первого неравенства системы: $-1 \le x \le 2 - \log_3 2$.

2. Решим второе неравенство системы:

$$\frac{\log_3 27x}{\log_{\frac{1}{27}} 3x} + 9 \ge 0;\ \frac{\log_3 x + 3}{-\frac{1}{3}(\log_3 x + 1)} + 9 \ge 0;\ 9 - \frac{3(\log_3 x + 3)}{\log_3 x + 1} \ge 0;\ \frac{\log_3 x + 3}{\log_3 x + 1} \le 3.$$

Сделаем замену $z=\log_3 x$.

$$\frac{z+3}{z+1}\le 3;\ -\frac{2z}{z+1}\le 0;\ \left[\begin{array}{l} z<-1 \\ z\ge 0. \end{array}\right.$$

Тогда $\left[\begin{array}{l} \log_3 x<-1 \\ \log_3 x\ge 0, \end{array}\right.$ откуда находим решение второго неравенства системы: $0<x<\frac{1}{3}$; $x\ge 1$.

3. Поскольку $1<2-\log_3 2$, получаем решение исходной системы неравенств:

$$0<x<\frac{1}{3};\ 1\le x\le 2-\log_3 2.$$

Ответ: $\left(0;\frac{1}{3}\right)$; $[1;2-\log_3 2]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах системы неравенств	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве системы неравенств	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 Дан равнобедренный треугольник с боковой стороной 4 и углом 120°. Внутри него расположены две равные касающиеся окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника. Найдите радиусы окружностей.

Решение.

Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC, в котором $AB=AC=4$, $\angle BAC=120°$. Пусть AH — высота треугольника ABC. Тогда H — середина BC,

$$BC=2BH=2AB\cos 30°=2\cdot 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}.$$

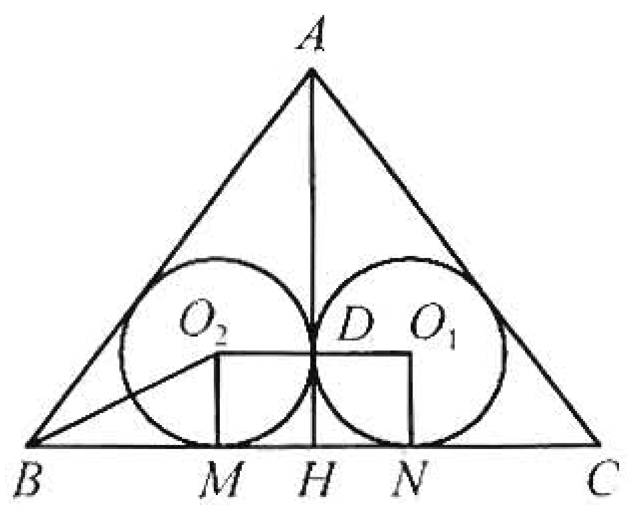


Рис. 1

Предположим, что окружность радиуса r с центром O_1 вписана в угол ACB и касается основания BC в точке N, а окружность того же радиуса с центром O_2 вписана в угол ABC, касается основания BC в точке M, а первой окружности — в точке D (рис. 1).

Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, поэтому

$$\angle O_2BM=15°;\ \mathrm{tg}15°=\frac{\sin 30°}{1+\cos 30°}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}.$$

Из прямоугольного треугольника BMO_2 находим:

$$BM=O_2M\cdot\mathrm{ctg}\angle MBO_2=r\cdot\mathrm{ctg}15°=r\cdot\left(2+\sqrt{3}\right).$$

Тогда $CN=BM=r\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)$.

Линия центров касающихся окружностей проходит через точку их касания, поэтому $O_1O_2=2r$, значит, $MN=O_1O_2=2r$, поскольку O_1O_2MN — прямоугольник. Следовательно,

$$4\sqrt{3}=BC=BM+MN+CN=r\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)+2r+r\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)=r\cdot\left(6+2\sqrt{3}\right),$$

откуда находим $r=\frac{4\sqrt{3}}{6+2\sqrt{3}}=\sqrt{3}-1$.

Пусть теперь окружность радиуса r с центром O_1 вписана в угол BAC и касается боковой стороны AB в точке P, вторая окружность радиуса r с центром O_2 вписана в угол ABC, касается боковой стороны AB в точке Q, а также касается первой окружности (рис. 2).

Из прямоугольных треугольников APO_1 и BQO_2 находим:

$$AP=O_1P\cdot\mathrm{ctg}\angle PAO_1=r\cdot\mathrm{ctg}60°=\frac{r}{\sqrt{3}},$$

$$BQ=O_2Q\cdot\mathrm{ctg}\angle QBO_2=r\cdot\mathrm{ctg}15°=r\cdot\left(2+\sqrt{3}\right).$$

Следовательно,

$$4=AB=AP+PQ+QB=AP+O_1O_2+QB=$$
$$=\frac{r}{\sqrt{3}}+2r+r\left(2+\sqrt{3}\right),$$

откуда находим $r=\frac{3-\sqrt{3}}{2}$.

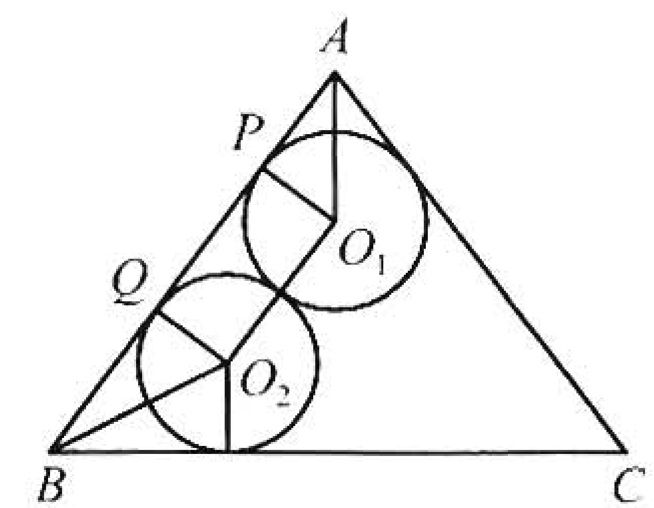


Рис. 2

В случае, когда окружности вписаны в углы BAC и ACB, получим тот же результат.

Ответ: $\sqrt{3}-1$ или $\frac{3-\sqrt{3}}{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

© 2012 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{2}{x+1}=a|x-3|$$

на промежутке $[0;+\infty)$ имеет более двух корней.

Решение.

Рассмотрим функции $f(x)=a|x-3|$ и $g(x)=\frac{2}{x+1}$. Исследуем уравнение $f(x)=g(x)$ на промежутке $[0;+\infty)$.

При $a\le 0$ все значения функции $f(x)$ на промежутке $[0;+\infty)$ неположительны, а все значения функции $g(x)$ — положительны, поэтому при $a\le 0$ уравнение $f(x)=g(x)$ не имеет решений на промежутке $[0;+\infty)$.

При $a>0$ функция $f(x)$ возрастает на промежутке $(3;+\infty)$. Функция $g(x)$ убывает на этом промежутке, поэтому уравнение $f(x)=g(x)$ всегда имеет ровно одно решение на промежутке $(3;+\infty)$, поскольку $f(3)<g(3)$ и $f\left(3+\frac{1}{a}\right)>g\left(3+\frac{1}{a}\right)$.

На промежутке $[0;3]$ уравнение $f(x)=g(x)$ принимает вид $3a-ax=\frac{2}{x+1}$. Это уравнение сводится к уравнению $ax^2-2ax+(2-3a)=0$. Будем считать, что $a>0$, поскольку случай $a\le 0$ был рассмотрен ранее. Дискриминант квадратного уравнения $D=4a^2-4a(2-3a)=16a^2-8a$, поэтому при $0<a<\frac{1}{2}$ это уравнение не имеет корней; при $a=\frac{1}{2}$ уравнение имеет единственный корень, равный 1; при $a>\frac{1}{2}$ уравнение имеет два корня.

Пусть уравнение имеет два корня, то есть $a>\frac{1}{2}$. Тогда оба корня меньше 3, поскольку при $x\ge 3$ значения функции $3a-ax$ неположительны, а значения функции $\frac{2}{x+1}$ положительны. По теореме Виета сумма корней равна 2, а произведение равно $\frac{2}{a}-3$. Значит, больший корень всегда принадлежит промежутку $[0;3]$, а меньший принадлежит этому промежутку тогда и только тогда, когда $\frac{2}{a}-3\ge 0$, то есть $a\le\frac{2}{3}$.

Таким образом, уравнение $\frac{2}{x+1}=a|x-3|$ имеет следующее количество корней на промежутке $[0;+\infty)$:

- нет корней при $a\le 0$;
- один корень при $0<a<\frac{1}{2}$;
- два корня при $a=\frac{1}{2}$ и $a>\frac{2}{3}$;
- три корня при $\frac{1}{2}<a\le\frac{2}{3}$.

Ответ: $\frac{1}{2}<a\le\frac{2}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

C6 Назовём кусок верёвки стандартным, если его длина не меньше 168 см, но не больше 175 см.

а) Некоторый моток верёвки разрезали на 24 стандартных куска, среди которых есть куски разной длины. На какое наибольшее число одинаковых стандартных кусков можно было бы разрезать тот же моток верёвки?

б) Найдите такое наименьшее число l, что любой моток верёвки, длина которого больше l см, можно разрезать на стандартные куски.

Решение.

Решение каждого пункта состоит из двух частей: оценка и пример.

Рассмотрим моток верёвки длиной x см. Условие того, что его можно разрезать на n стандартных кусков, записывается в виде $168n\le x\le 175n$ или $168\le\frac{x}{n}\le 175$.

а) В данном случае имеем $168\cdot 24<x<175\cdot 24$ (неравенства строгие, поскольку среди кусков есть неравные). Пусть эту верёвку можно разрезать на n стандартных кусков, тогда $168\le\frac{x}{n}\le 175$. При $n\ge 25$ получаем $\frac{x}{n}\le\frac{x}{25}<\frac{175\cdot 24}{25}=168$, то есть этот моток верёвки нельзя разрезать больше чем на 24 стандартных куска.

При $n=24$ получаем $168<\frac{x}{24}<175$. Значит, эту верёвку можно разрезать на 24 одинаковых стандартных куска, но нельзя разрезать на большее количество стандартных кусков.

б) Отрезки $[168n;175n]$ и $[168(n+1);175(n+1)]$, являющиеся решениями неравенств $168n\le x\le 175n$ и $168(n+1)\le x\le 175(n+1)$, имеют общие точки для всех n, при которых $168(n+1)\le 175n$, то есть при $n\ge 24$. Значит, любую верёвку длиной $168\cdot 24=4032$ см или более можно разрезать на стандартные куски.

Докажем, что верёвку, длина которой x см больше $175\cdot 23=4025$ см, но меньше $168\cdot 24=4032$ см, нельзя разрезать на n стандартных кусков ни для какого n. При $n\ge 24$ получаем $x<168\cdot 24\le 168n$, что противоречит условию $168n\le x$. При $n\le 23$ получаем $x>175\cdot 23\ge 175n$, что противоречит условию $x\le 175n$. Таким образом, искомое число равно 4032.

Ответ: а) 24; б) 4032.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — искомая оценка в п. *а*; — пример в п. *а*, обеспечивающий точность предыдущей оценки; — искомая оценка в п. *б*; — пример в п. *б*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4