Ю.А. Глазков,
Т.А. Корешкова,
В.В. Мирошин,
Н.В. Шевелева

ЕГЭ

МАТЕМАТИКА

ЕДИНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН

11 класс

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ

СБОРНИК ЗАДАНИЙ

- Характеристика структуры и содержания экзаменационной работы
- Подробный анализ основных типов заданий
- Методические приемы формирования необходимых знаний и умений
- Материалы для проведения предэкзаменационных работ

2010

ЭКЗАМЕН

ЕГЭ

СБОРНИК ЗАДАНИЙ

Ю.А. Глазков
Т.А. Корешкова
В.В. Мирошин
Н.В. Шевелева

МАТЕМАТИКА

Рекомендовано ИСМО Российской Академии Образования для подготовки выпускников всех типов образовательных учреждений РФ к сдаче экзаменов в форме ЕГЭ

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЭКЗАМЕНУ

Характеристика структуры и содержания экзаменационной работы

Подробный анализ основных типов заданий

Методические приемы формирования необходимых знаний и умений

Материалы для проведения предэкзаменационных работ

Издание третье, исправленное

Издательство
«ЭКЗАМЕН»
МОСКВА, 2010

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21
Г52

Глазков, Ю.А.

Г52 Математика. ЕГЭ: сборник заданий: методическое пособие для подготовки к экзамену / Ю.А. Глазков, Т.А. Корешкова, В.В. Мирошин, Н.В. Шевелева. — 3-е изд., испр. — М.: Издательство «Экзамен», 2010. — 287, [1] с. (Серия «ЕГЭ. Сборник заданий»)

ISBN 978-5-377-02994-6

Сборник заданий включает материалы, которые понадобятся учителю математики для подготовки школьников к ЕГЭ.

Большое внимание уделяется методическим приемам формирования знаний, умений и навыков, необходимых школьнику для успешной сдачи ЕГЭ. В пособии приведены решения заданий.

Большое количество примеров, заданий для самостоятельной работы, 8 вариантов тренировочных тестов помогут учителю организовать эффективную подготовку к ЕГЭ.

Пособие предназначено учителям старших классов, методистам, членам приемных комиссий вузов, преподавателям подготовительных курсов.

В состав авторского коллектива входят специалисты, имеющие большой опыт работы в школе и вузе и принимающие участие в разработке тестовых заданий для ЕГЭ.

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21

Формат 84x108/32. Гарнитура «Школьная».
Бумага газетная. Уч.-изд. л. 8,2. Усл. печ. л. 15,12.
Тираж 150 000 (3-й завод – 10 000) экз. Заказ № 10320.

ISBN 978-5-377-02994-6

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

В 2010 году выпускники средних общеобразовательных учреждений всех регионов Российской Федерации будут сдавать единый государственный экзамен (ЕГЭ). Список учебных дисциплин и форму участия выпускников в экзамене определяют региональные органы управления образованием. Но, несомненно, большинство выпускников (более 600 000) будут сдавать ЕГЭ по математике.

Основными целями введения ЕГЭ являются обеспечение государственных гарантий доступности и равных возможностей получения полноценного образования, повышение объективности итоговой аттестации выпускников общеобразовательных учреждений.

Таким образом, в школы и вузы внедряется новая форма аттестации, и, следовательно, необходимо готовить к ней учащихся.

Данное пособие адресовано учащимся старших классов и учителям математики. В нем приведены примеры решений задач, а также наборы задач для самостоятельной подготовки.

Они содержат:

– задания с выбором ответа. К каждому такому заданию предлагается 4 ответа, из которых только один верный. От ученика не требуется записи решения. Ему нужно сравнить полученный ответ с предложенными к заданию ответами и выбрать правильный.

– задания с кратким ответом. При их выполнении надо записать полученный краткий ответ. Ученик может вести записи в любой удобной ему форме, выполняя мысленно, если умеет, промежуточные вычисления и преобразования.

– задания с развернутым ответом. При выполнении таких заданий требуется записать полное и обоснованное решение. Их назначение — проверка умения построить логически грамотную цепочку рассуждений, обосновать полученные выводы и математически грамотно записать решение.

Учитель должен помочь учащимся освоить рациональные способы выполнения таких заданий. Для этого необходимо задания с выбором ответа и с кратким ответом использовать в учебном процессе наряду с традиционными заданиями. Учащимся же нужно научиться рационально использовать время при решении этих задач. Правильно оформлять и обосновывать, если требуется, решения заданий.

Анализ результатов эксперимента по введению ЕГЭ показывает, что лучших результатов достигают те учителя, которые организуют непрерывное повторение учебного материала в течение всего времени обучения в старших классах, а не откладывают подготовку к экзамену на второе полугодие 11 класса.

Надеемся, данное пособие окажет необходимую помощь как учителям, так учащимся.

Желаем успеха!

Глава 1.
Рациональные выражения, уравнения, неравенства и функции

§ 1. *Тождественные преобразования рациональных выражений*

Пример 1. Представьте выражение $(a+b+c)^2$ в виде многочлена стандартного вида.

1) $(a+b+c)(a+b+c)$

2) $a^2+b^2+c^2$

3) $a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

4) $a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc+ab+ac+bc$

Решение. Используя сочетательное свойство сложения, запишем данное выражение в виде $((a+b)+c)^2$ и воспользуемся формулой квадрата суммы, считая слагаемыми $(a+b)$ и c. При этом $((a+b)+c)^2=(a+b)^2+2(a+b)\cdot c+c^2$.

Применяя формулу еще раз, получим:

$$(a+b)^2+2(a+b)\cdot c+c^2=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2=$$
$$=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc.$$

Номер верного ответа — 3).

Пример 2. Разложите многочлен $20x^2-45y^6$ на множители.

1) $5(2x-3y^3)(2x+3y^3)$

2) $(2x-3y^3)(2x+3y^3)$

3) $5(2x-3y^3)(2x-3y^3)$

4) $10x^2-5y^6+10x^2-40y^6$

Решение. Вынесем сначала общий множитель за скобки, затем представим каждый одночлен в виде полного квадрата:

$$20x^2-45y^6=5(4x^2-9y^6)=5((2x)^2-(3y^3)^2).$$

Используя формулу разности квадратов, получим:

$$5((2x)^2-(3y^3)^2)=5(2x-3y^3)(2x+3y^3).$$

Номер верного ответа — 1).

Пример 3. Упростите выражение

$$(a^2-b^2)^3+(b^3+a^3)^2+3(a^2b-b^2a)(a^2b+b^2a)-(2a^6+2a^3b^3)+7.$$

Р е ш е н и е . Используя тождества сокращенного умножения и свойства степени с натуральным показателем, получим:

$$(a^2-b^2)^3+(b^3+a^3)^2+3(a^2b-b^2a)(a^2b+b^2a)-(2a^6+2a^3b^3)+7=$$
$$=(a^6-3a^4b^2+3a^2b^4-b^6)+(b^6+2b^3a^3+a^6)+3(a^4b^2-b^4a^2)-$$
$$-(2a^6+2a^3b^3)+7.$$

Раскроем скобки и приведем подобные члены:

$$(a^6-3a^4b^2+3a^2b^4-b^6)+(b^6+2b^3a^3+a^6)+3(a^4b^2-b^4a^2)-$$
$$-(2a^6+2a^3b^3)+7=a^6-3a^4b^2+3a^2b^4-b^6+b^6+2b^3a^3+a^6+$$
$$+3a^4b^2-3b^4a^2-2a^6-2a^3b^3+7=7.$$

Ответ: 7.

Приведем пример текстовой задачи, при решении которой используются формулы сокращенного умножения.

Пример 4. Докажите, что разность квадратов суммы и разности двух произвольных натуральных чисел кратна 4.

Р е ш е н и е . Обозначим через a и b два натуральных числа и рассмотрим разность квадратов суммы и разности этих натуральных чисел: $(a+b)^2-(a-b)^2$.

Разложим на множители полученное выражение:

$$(a+b)^2-(a-b)^2=(a+b+(a-b))\cdot(a+b-(a-b))=$$
$$=(a+b+a-b)\cdot(a+b-a+b)=2a\cdot 2b=4ab.$$

Ясно, что рассматриваемое выражение делится на 4.

Пример 5. Разложите многочлен x^4+64 на множители и найдите сумму свободных членов всех многочленов разложения.

Р е ш е н и е . Воспользуемся следующим приёмом: прибавим к данному выражению дополнительный член так, чтобы получить полный квадрат, а затем вычтем этот же член:

$$x^4+64=\left(x^2\right)^2+8^2+2\cdot x^2\cdot 8-2\cdot x^2\cdot 8=(x^2+8)^2-16x^2.$$

Теперь преобразуем полученное выражение как разность квадратов:

$$(x^2+8)^2-16x^2=(x^2+8)^2-(4x)^2=(x^2+8-4x)\cdot(x^2+8+4x)=$$
$$=(x^2-4x+8)\cdot(x^2+4x+8).$$

Отметим, что полученные квадратные трехчлены не раскладываются на линейные множители.

Сумма свободных членов квадратных трехчленов разложения равна 8 + 8 = 16.

Ответ: 16.

Пример 6. При условии, что $a+b+c=0$, представьте многочлен $a^3+b^3+c^3$ в виде одночлена и укажите его коэффициент.

Решение. Из равенства $a+b+c=0$ следует, что $a=-b-c$. Тогда

$$a^3+b^3+c^3=(-b-c)^3+b^3+c^3=-b^3-3b^2c-3bc^2-c^3+b^3+c^3=$$
$$=-b^3-3bc(b+c)-c^3+b^3+c^3=-3bc(b+c)=-3bc(-a)=3abc.$$

Таким образом, $a^3+b^3+c^3=3abc$ и коэффициент одночлена равен 3.

Ответ: 3.

Задания на тождественные преобразования выражений с развернутым ответом требуют не только верного выполнения стандартных преобразований (как правило, не указанных в заданиях явно), но и получения некоторых новых выводов из результатов преобразования или использования некоторых дополнительных фактов, доказательство которых также должно быть приведено.

Пример 7. Найдите значение выражения

$$\left(\frac{c}{a-b}+\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}\right)\left(\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right)$$

при условии, что $a+b+c=0$.

Решение. Рассмотрим сначала произведение первого слагаемого первого множителя на второй множитель:

$$\frac{c}{a-b}\cdot\left(\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right)=1+\frac{c}{a-b}\cdot\left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right)=$$

$$=1+\frac{c}{a-b}\cdot\frac{b^2-bc+ac-a^2}{ab}=1+\frac{c}{a-b}\cdot\frac{c(a-b)-(a^2-b^2)}{ab}=$$

$$=1+\frac{c}{a-b}\cdot\frac{(a-b)(c-(a+b)}{ab}=1+\frac{c}{ab}\cdot(c-(a+b)).$$

Из равенства $a+b+c=0$ следует, что $c=-a-b$ или $a+b=-c$. Используя последнее равенство, получим:

$$\frac{c}{a-b}\cdot\left(\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right)=1+\frac{2c^2}{ab}.$$

Аналогично получаем, что произведения соответственно второго и третьего слагаемых первого множителя на второй множитель, равны:

$$\frac{a}{b-c}\cdot\left(\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right)=1+\frac{2a^2}{bc},$$

$$\frac{b}{c-a}\cdot\left(\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right)=1+\frac{2b^2}{ac}.$$

Таким образом,

$$\left(\frac{c}{a-b}+\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}\right)\left(\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right)=$$

$$=1+\frac{2c^2}{ab}+1+\frac{2a^2}{bc}+1+\frac{2b^2}{ac}=3+\frac{2(c^3+a^3+b^3)}{abc}.$$

Поскольку при условии $a+b+c=0$ имеет место равенство $a^3+b^3+c^3=3abc$ (см. решение примера 6), получим

$$\left(\frac{c}{a-b}+\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}\right)\left(\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right)=$$

$$=3+\frac{2(c^3+a^3+b^3)}{abc}=3+\frac{2\cdot 3abc}{abc}=9.$$

Таким образом, $\left(\frac{c}{a-b}+\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}\right)\left(\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right)=9$.

Ответ: 9.

Пример 8. Упростите выражение:

$$\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\frac{1}{(a+2)(a+3)}+\ldots+\frac{1}{(a+6)(a+7)}.$$

Р е ш е н и е . Воспользуемся равенством

$$\frac{1}{(a+b)(a+b+1)}=\frac{1}{(a+b)}-\frac{1}{(a+b+1)},$$

справедливость которого легко проверить, если дроби в правой части привести к общему знаменателю.

Тогда

$$\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\frac{1}{(a+2)(a+3)}+\ldots+\frac{1}{(a+6)(a+7)}=$$

$$=\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}\right)+\left(\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a+2}\right)+\left(\frac{1}{a+2}-\frac{1}{a+3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{a+6}-\frac{1}{a+7}\right).$$

После раскрытия скобок и приведения подобных членов получим:

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{a+7}=\frac{7}{a^2+7a}.$$

Ответ: $\frac{7}{a^2+7a}$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задания с выбором ответа

1. Представьте в виде многочлена выражение $3c(b-a)(a+b)$.

   1) $3abc+3b^2c-3a^2c-3abc$

   2) $3b^2c-3a^2c$

   3) $3c(b^2-a^2)$

   4) $3(b^2c-a^2c)$

2. Представьте в виде многочлена выражение $(3x-2)^2-(2-x)^3$.

   1) x^3+3x^2-12

   2) x^3+3x^2-4

   3) $-x^3+3x^2-4$

   4) $x^3+3x^2+24x-4$

3. Представьте в виде многочлена выражение $\frac{1}{64}(4x^3-2^2)^3$.

   1) $x^9-3x^6+3x^3+1$

   2) $x^9-3x^5+3x^3-1$

   3) $x^9-3x^6+3x^3-1$

   4) $x^9-x^6+x^3-x^6+x^3-x^6+x^3+1$

4. Разложите на множители многочлен $x^4+49-14x^2$.

1) $(x^2-7)^2$

2) $(x^2-7)^3$

3) $(x^2+7)^2$

4) $(x^2-7)(x^2+7)$

5. Разложите на множители многочлен $27a^6-125b^9$.

1) $(9a^3-25b^3)(9a^3+25b^3)$

2) $\left(3a^2-5b^3\right)^2$

3) $(3a^2-5b^3)(9a^4-15a^2b^3+25b^6)$

4) $(3a^2-5b^3)(9a^4+15a^2b^3+25b^6)$

6. Сократите дробь $\dfrac{a^2-16}{128-2a^3}\cdot\dfrac{a^2-16}{128-2a^3}$.

1) $-\dfrac{a+4}{32+8a+2a^2}$ 2) $\dfrac{a+4}{16+4a+a^2}$

3) $\dfrac{a+4}{32-8a-2a^2}$ 4) 1.

7. Сократите дробь $\dfrac{32a^5-(2a)^3}{4a^4-4a^3+a^2}$.

1) $\dfrac{8a(2a-1)}{2a+1}$ 2) $\dfrac{8a(2a+1)}{2a-1}$

3) $\dfrac{a(2a+1)}{2a-1}$ 4) $8a$

8. Упростите выражение $\dfrac{x+2}{2x-4}+\dfrac{3x^2+12}{24-6x^2}$ и найдите его значение при $x=0{,}1$.

1) $\dfrac{10}{99}$ 2) $-\dfrac{20}{399}$

3) $-3{,}99$ 4) $0{,}01$

9. Укажите все значения a, для которых верно равенство

$$(3a+5)^2-(3a-5)^2=(15a+1)^2-(15a-1)^2.$$

1) $(-\infty;+\infty)$ 2) $(-\infty;0)$

3) 0 4) все целые числа

Задания с кратким ответом

10. Представьте в виде многочлена выражение

$$(a-b)^3(a+b)^3+(b+a)^2(a^2-ab+b^2)^2+3(a^2b-b^2a)(a^2b+b^2a)$$

и найдите сумму коэффициентов полученного многочлена.

11. Представьте в виде многочлена выражение

$$(a^2-b^2)^3+(b^3+a^3)^2+3(a^2b-b^2a)(a^2b+b^2a)$$

и найдите разность коэффициентов полученного многочлена.

12. Упростите выражение $\frac{x+3}{2x-6}-\frac{3-x}{3x+9}+\frac{5x^2+27}{54-6x^2}$ и найдите его значение при $x=103$.

13. Упростите выражение

$$a\cdot\frac{1}{a^2+1-2a}+\frac{a}{1+a^3}\cdot\frac{a(1-a)-1}{1-a}-2\cdot\frac{a^2-a+1}{(a-1)(a^2-1)}$$

и найдите его значение при $a=201$.

14. Упростите выражение

$$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1+a}+\frac{2}{1+a^2}+\frac{4}{1+a^4}+\frac{8}{1+a^8}+\frac{16}{1+a^{16}}+\frac{32}{1+a^{32}}-\frac{64}{1-a^{64}}.$$

15. Упростите выражение

$$\frac{1}{1-a}-\frac{1}{1+a}-2\cdot\frac{a}{1+a^2}-4\cdot\frac{a^3}{1+a^4}-8\cdot\frac{a^7}{1+a^8}-$$

$$-16\cdot\frac{a^{15}}{1+a^{16}}-32\cdot\frac{a^{31}}{1+a^{32}}-64\frac{a^{63}}{1-a^{64}}.$$

16. Разложите на множители многочлен x^4+x^2+1 и найдите сумму свободных членов всех многочленов разложения.
Указание. Воспользуйтесь приемом, описанным в примере 5.

Задания с развернутым ответом

17. Сократите дробь $\frac{(x+y+z)^3-(x^3+y^3+z^3)}{3(x^2+xy+xz+yz)}$.

18. Найдите значение выражения

$$\frac{a^5+b^5+c^5}{7}-\frac{a^3+b^3+c^3}{5}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$$

при условии, что $a+b+c=0$.

§ 2. Решение уравнений, неравенств и их систем

2.1. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнение вида $ax + b = 0$, где $a \neq 0$, называется линейным.

Линейное уравнение имеет единственный корень $x_0 = -\frac{b}{a}$.

Таким образом, $ax + b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$.

Линейным уравнением с двумя переменными называется уравнение вида $ax + by = c$, где $a^2 + b^2 \neq 0$.

Графиком линейного уравнения с двумя переменными является прямая.

Следует помнить, что прямая, являющаяся графиком уравнения вида $ax = c$, не является графиком функции.

Системой двух линейных уравнений с двумя переменными называется система вида $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$, где a_1, a_2, b_1, b_2 — действительные числа, причем $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$ и $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$.

Пример 1. Найдите интервал, которому принадлежит корень уравнения $7x - 3x = 8$.

1) (0; 1)
2) (1; 2)
3) (2; 3)
4) (1; 4)

Решение.

$$7x - 3x = 8 \Rightarrow 4x = 8 \Rightarrow x = 2.$$

Корень уравнения принадлежит интервалу (1; 4).
Номер верного ответа: 4.

Пример 2. Найдите интервал, которому принадлежит корень уравнения $\frac{2x+3}{5} + \frac{x+7}{2} = 7$.

1) (0; 1)
2) (1; 2)
3) (2; 3)
4) (3; 4)

Решение.

$$\frac{2x+3}{5} + \frac{x+7}{2} = 74x \Rightarrow +6 + 5x + 35 = 70 \Rightarrow 9x = 29 \Rightarrow x = \frac{29}{9}.$$

Так как $3<\frac{29}{9}<4$, то корень уравнения принадлежит интервалу (3; 4).

Номер верного ответа — 4).

Пример 3. Найдите сумму наибольшего целого числа, не превосходящего корень уравнения $1-\frac{x-\frac{x+1}{3}}{3}=\frac{x}{2}-\frac{2x-\frac{10-7x}{3}}{2}$ и наименьшего целого числа, большего, чем корень.

1) 1 3) 3

2) –1 4) –3

Решение.

$$1-\frac{x-\frac{x+1}{3}}{3}=\frac{x}{2}-\frac{2x-\frac{10-7x}{3}}{2}\Leftrightarrow\frac{9-3x+x+1}{9}=\frac{3x-6x+10-7x}{6}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 20-4x=-30x+30\Leftrightarrow 26x=10\Leftrightarrow x=\frac{5}{13}.$$

Так как $0<\frac{5}{13}<1$, то искомая сумма $0+1=1$.

Номер верного ответа — 1).

Пример 4. Найдите значение выражения $3a+1$, где a — корень уравнения $(x+2)^3-x(x+3)^2=23$.

1) 10 3) 13

2) 16 4) 3

Решение.

$$(x+2)^3-x(x+3)^2=23\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3+12x^2+12x+8-x^3-12x^2-9x=23\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x=15\Rightarrow x=5$$

Получим, что значение данного выражения равно $3\cdot5+1=16$.

Номер верного ответа — 2).

Пример 5. Пусть $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений

$$\begin{cases}x+3y=9,\\-x+2y=6\end{cases}.$$

Найдите x_0+y_0.

1) 2 3) 4
2) 3 4) 5

Решение.

Заменяя второе уравнение системы суммой уравнений, получим:

$$\begin{cases} x+3y=9, \\ -x+2y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y=9, \\ 5y=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=9-3y, \\ y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0, \\ y=3 \end{cases}.$$

Сумма решений равна 3.
Номер верного ответа — 2).

Пример 6. Сумма цифры единиц и цифры десятков двузначного числа равна 12. Цифра десятков в 12 раз меньше самого числа. Найдите это число.

1) 84 3) 4
2) 48 4) 8

Решение.

Пусть x — цифра единиц, а y — цифра десятков искомого числа. Из условия задачи получим систему уравнений

$$\begin{cases} x+y=12, \\ 12y=10y+x \end{cases}.$$

$$\begin{cases} x+y=12, \\ 12y=10y+x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y=12, \\ x=2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y=12, \\ x=2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4, \\ x=8 \end{cases}.$$

Искомое число – 48.
Номер верного ответа — 2).

Пример 7. Натуральное двузначное число в 5 раз больше суммы его цифр. Если к числу прибавить 9, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите исходное число.

1) 55 3) 44
2) 54 4) 45

Решение.

Пусть x — цифра единиц, а y — цифра десятков искомого числа. Из условия задачи получим систему уравнений

$$\begin{cases} 10y+x=5(x+y), \\ 10y+x+9=10x+y. \end{cases}$$

$$\begin{cases}10y+x=5(x+y),\\10y+x+9=10x+y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x-5y=0,\\x-y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5,\\y=4\end{cases}.$$

Искомое число — 45.

***Номер верного ответа* — 4).**

Если вместо конкретных чисел в качестве коэффициентов используются переменные a, b, то уравнение называется уравнением с параметрами.

Решить уравнение с параметрами – значит найти все его решения при всех возможных значениях параметров или указать невозможность его разрешимости.

Таким образом, в отличие от линейного уравнения, уравнение степени не выше первой может иметь единственное решение, бесконечное их множество или вовсе не иметь решений.

$$ax+b=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a\neq0\\x=-\dfrac{b}{a}\end{cases}\\\begin{cases}a=0\\0x=b\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a\neq0,\\x=-\dfrac{b}{a}\end{cases}\\\begin{cases}a=0,\\b=0,\\0x=0\end{cases}\\\begin{cases}a=0,\\b\neq0,\\0x=b.\end{cases}\end{array}\right.$$

Пример 8. Укажите m, при котором уравнение $4+mx=3x+1$ не имеет решений.

Решение.

$$4+mx=3x+1\Rightarrow(m-3)x=-3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}m=3,\\0x=-3\end{cases}\\\begin{cases}m\neq3,\\x=-\dfrac{3}{m-3}\end{cases}\end{array}\right.$$

При $m=3$ уравнение решений не имеет,

при $m\neq3$ $x=-\dfrac{3}{m-3}$.

Ответ: 3.

Пример 9. Укажите a, при котором уравнение $(a^2-1)x=a-1$ имеет бесконечное множество решений.

Решение.

$$(a^2-1)x=a-1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=1, \\ 0x=0 \end{cases} \\ \begin{cases} a=-1 \\ 0x=-2 \end{cases} \\ \begin{cases} a^2\neq 1 \\ x=\dfrac{1}{a+1} \end{cases} \end{array}\right. .$$

При $a\neq 1$ или $a\neq -1$ $x=\dfrac{1}{a+1}$, при $a=1$ $x\in R$, при $a=-1$ решений нет.

Ответ: 1.

Пример 10. Найдите все значения параметра b, при которых уравнение $b^4x+b^2-(2+\sqrt{2})b+2\sqrt{2}=b^2(b+\sqrt{2})+4x$ имеет бесконечно много корней.

Решение.

Приведем уравнение к стандартному виду.

$$b^4x+b^2-(2+\sqrt{2})b+2\sqrt{2}=b^2(b+\sqrt{2})+4x \Leftrightarrow$$

$$(b^4-4)x=b^2(b+\sqrt{2})-b^2-(2+\sqrt{2})b-2\sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (b-\sqrt{2})(b+\sqrt{2})(b^2+2)x=b^2(b+\sqrt{2})-(b+2)(b+\sqrt{2}) \Leftrightarrow .$$

$$\Leftrightarrow (b-\sqrt{2})(b+\sqrt{2})(b^2+2)x=(b+\sqrt{2})(b^2-b-2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (b-\sqrt{2})(b+\sqrt{2})(b^2+2)x=(b+\sqrt{2})(b-2)(b+1)$$

Уравнение степени не выше первой имеет бесконечно много корней, если коэффициент при переменной и свободный член уравнения одновременно обращаются в ноль. Поэтому искомые значения параметра задаются системой

$$\begin{cases} (b-\sqrt{2})(b+\sqrt{2})(b^2+2)=0, \\ (b+\sqrt{2})(b-2)(b+1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow b=-\sqrt{2} .$$

Ответ: $-\sqrt{2}$.

Пример 11. Решите уравнение $\frac{x-a}{b-a}+\frac{x-b}{a-b}+x=2$ при всех значениях параметров a и b, таких, что $a \neq b$.

Решение.

Рассмотрим функцию $f(x)=\frac{x-a}{b-a}+\frac{x-b}{a-b}$. Это многочлен степени не выше первой. Так как $f(a)=1$, $f(b)=1$ и $a \neq b$, то $f(x)=1$ при всех значениях переменной x. Следовательно, уравнение $\frac{x-a}{b-a}+\frac{x-b}{a-b}+x=2 \Leftrightarrow 1+x=2 \Leftrightarrow x=1$.

Ответ: 1.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задания с выбором ответа

19. Найдите интервал, которому принадлежит корень уравнения $\frac{2x+1}{3}=1+\frac{3x-1}{2}$.

1) (0; 1)
2) (–1; 0)
3) (–2; –1)
4) (3; 4)

20. Найдите интервал, которому принадлежит корень уравнения $2-\frac{1}{15}\left(2x-\frac{4-3x}{5}\right)=\frac{1}{5}\left(7x-\frac{x-3}{2}\right)$.

1) (0; 1)
2) (1; 2)
3) (2; 3)
4) (3; 4)

21. Найдите сумму наибольшего целого числа, не превосходящего корня уравнения $(3x-1)^2-5(2x+1)^2+(6x-3)(2x+1)=(x-1)^2$, и наименьшего целого числа, большего, чем корень.

1) 1
2) –1
3) 3
4) –3

22. Найдите сумму наибольшего целого числа, не превосходящего корня уравнения $(x+6)^2(x+1)-(x-3)^2(x+10)=(3x+4)^2$ и наименьшего целого числа, большего, чем корень.

1) 1
2) –1
3) 3
4) –3

23. Пусть $(x_0;\ y_0)$ — решение системы уравнений $\begin{cases}7x-5y=-2,\\-8x-y=9.\end{cases}$

Найдите произведение $x_0 \cdot y_0$.

1) 1	3) –5
2) –3	4) 4

24. Пусть $(x_0;\ y_0)$ — решение системы уравнений $\begin{cases}3x+2y=-7,\\5x-2y=-1.\end{cases}$

Найдите $|x_0+y_0|$.

1) 5	3) 3
2) 2	4) 4

25. Найдите частное $\frac{x_0}{y_0}$, где $(x_0,\ y_0)$ — решение системы уравнений $\begin{cases}4x-3y-5=0,\\-2x+9y+1=0.\end{cases}$

1) –2	3) –7
2) 7	4) 5

26. Пусть $(x_0;\ y_0)$ — решение системы уравнений $\begin{cases}5x-2y-11=0,\\3x+5y-19=0.\end{cases}$

Найдите x_0+y_0.

1) 5	3) 10
2) 9	4) 13

Задания с кратким ответом

27. Найдите значение a, при котором уравнение $ax = 1$ не имеет корней.

28. Найдите значение a, при котором уравнение $(a-5)x=1$ не имеет корней.

29. Найдите значение a, при котором уравнение $ax=2-2x$ не имеет корней.

30. Найдите значение a, при котором уравнение $(a-1)x+2=a+1$ имеет бесконечное множество корней.

31. Найдите значение a, при котором уравнение $a^2x=x+1+a$ имеет бесконечное множество корней.

32. Найдите значение m, при котором уравнение

$$(m+2)x=(m+2)(2x-1)$$

имеет бесконечное множество корней.

33. Сумма цифр натурального двузначного числа равна 11. Если из числа вычесть 63, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите исходное число.

34. Сумма цифр двузначного числа в 5 раз меньше самого числа, а цифра десятков на 1 больше цифры единиц. Найдите это число.

35. Если из натурального двузначного числа вычесть 63, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите исходное число, если цифра десятков, уменьшенная на 1, в 4 раза больше цифры единиц числа.

36. Сумма первого, второго и третьего членов арифметической прогрессии равна 3. Сумма второго, третьего и пятого ее членов равна 11. Найдите первый член прогрессии и разность прогрессии.

37. Сумма второго, третьего и четвертого членов арифметической прогрессии равна 12, а сумма третьего, четвертого и пятого членов – 21. Найдите десятый член прогрессии.

Задания с развернутым ответом

38. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$|a|\left(a^2+2\right)x+a^2\left(a+\sqrt{5}\right)=$$

$$=\sqrt{5}a^2x+a^2+6\sqrt{5}+2\sqrt{5}x+\left(6+\sqrt{5}\right)a$$

имеет бесконечно много корней.

39. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$9x+b^2-\left(2-\sqrt{3}\right)b=b^4x+b^2\left(b+\sqrt{3}\right)$$

не имеет решений.

40. От двух кусков сплава массами m и n килограммов с различным процентным содержанием меди отрезано по куску равной массы. Каждый из отрезанных кусков сплавили с остатком другого куска, после чего процентное содержание меди в обоих сплавах стало одинаковым. Какова масса каждого из отрезанных кусков?

41. Некоторый сплав состоит из двух металлов. Отношение процентного содержания металлов в первом сплаве 1 : 2, во втором — 2 : 3. Сколько частей каждого сплава надо взять, чтобы можно было получить третий сплав, содержащий те же металлы в отношении 17 : 27?

2.2. КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Пример 1. Укажите больший корень уравнения

$$x^2-11x+10=0.$$

1) 10 2) –1
3) 1 4) –10

Решение.

Найдем корни уравнения:

$$x^2-11x+10=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{11-9}{2} \\ x=\frac{11+9}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=10. \end{array}\right.$$

Больший корень уравнения равен 10.
Номер верного ответа — 1).

Пример 2. Указите интервал, которому принадлежит больший корень уравнения $3x^2-2x-7=0$.

1) (1,2; 1,5) 2) (1,2; 1,6)
3) (1,5; 2) 4) (2; 2,2)

Решение.

$$3x^2-2x-7=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1+\sqrt{22}}{3} \\ x=\frac{1-\sqrt{22}}{3} \end{array}\right..$$

Оценим значение большего корня уравнения.

Так как $4{,}6<\sqrt{22}<5$, то $1{,}8<\frac{1+\sqrt{22}}{3}<2$.

Номер верного ответа — 3).

Неотрицательность дискриминанта $D=b^2-4ac$ квадратного трехчлена является условием, равносильным существованию его корней. Поэтому в ряде задач дано существование корней, из чего надо сделать вывод, что и дискриминант неотрицателен.

Пример 3. Найдите наименьше из значений x, для которых существуют числа y и z, удовлетворяющие уравнению

$$x^2+2y^2+z^2+xy-xz-yz=1.$$

Р е ш е н и е . Так как в условии сказано, что при некотором искомом значении x существуют решения этого уравнения, то уравнение $z^2-z(x+y)+(x^2+xy+2y^2-1)=0$ имеет решение. Значит, существует пара значений переменных x и y, при которых дискриминант уравнения $D(y,x)=(x+y)^2-4(x^2+2y^2+xy-1)$ неотрицателен. Следовательно, при искомом значении x неравенство $-7y^2-2xy-3x^2+4\geq 0$ имеет решение. А это в свою очередь означает, что дискриминант квадратного трехчлена $D(x)=-80x^2+112$ тоже неотрицателен.

Следовательно, решая неравенство $5x^2 \leq 7$, мы находим все значения переменной x, удовлетворяющие условию задачи. Выбирая из них наименьшее, получим $x=-\sqrt{\frac{7}{5}}$.

Ответ: $-\sqrt{\frac{7}{5}}$.

Пример 4. Найдите все значения параметра a, для которых уравнение $x^2+3xy+3ay^2+\left(\frac{9}{2}-a\right)y+4x+5=0$

1) имеет хотя бы одно решение при $y = 2$.
2) имеет хотя бы одно решение $(x_0; y_0)$.

Р е ш е н и е . Ответ на первый вопрос задачи стандартный. Действительно, если пара чисел $(x_0; 2)$ — решение, то:

$$x_0^2+6x_0+12a+12a+9-2a+4x_0+5=0 .$$

Или $x_0^2+10x_0+10a+14=0$. Чтобы существовало какое-либо решение этого уравнения, его дискриминант должен быть неотрицателен.

$$D(a)=44-40a\geq 0 \text{, т.е. } a\leq\frac{11}{10} .$$

Решение второй задачи является развитием решения первой. Действительно, запишем уравнение в виде:

$$x^2+(3y+4)x+\left(3ay^2+\left(\frac{9}{2}\right)y+5\right)=0 .$$

Если уравнение имеет решение, то его дискриминант неотрицателен. $D(y,a)=3(3-4a)y^2+(6+4a)y-4\geq 0$.

В отличие от первой задачи, старший коэффициент получившегося многочлена параметрический, поэтому должны быть рассмотрены три случая.

1) $a=\frac{3}{4}$. $D\left(y,\frac{3}{4}\right)=9y-4$ и, конечно же, найдется число y такое, что дискриминант будет неотрицателен. Например, $y = 2$.

2) $a<\frac{3}{4}$. В этом случае первый коэффициент квадратного трехчлена положителен, а свободный член – отрицателен. Поэтому всегда найдутся числа, являющиеся решением данного неравенства.

3) $a>\frac{3}{4}$. В этом случае первый коэффициент отрицателен. Поскольку решение должно существовать,

$$D(a)=16a^2-144a+180\geq 0.$$

Получим систему:

$$\begin{cases} a>\frac{3}{4}, \\ 4a^2-36a+45\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{3}{4}<a\leq\frac{3}{2}, \\ a\geq\frac{15}{2}. \end{array}\right.$$

Объединяя найденные значения параметра, получим: $\left[\begin{array}{l} a\leq\frac{3}{2}, \\ a\geq\frac{15}{2}. \end{array}\right.$

Ответ: $\left(-\infty;\frac{3}{2}\right]\cup\left[\frac{15}{2};+\infty\right)$.

Пример 5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 10x^2+5y^2-2xy-38x-6y+41=0, \\ 3x^2-2y^2+5xy-17x-6y+20=0 \end{cases}.$$

Решение. Вычтем из первого уравнения второе, умноженное на 2. Получим

$$\begin{cases} 10x^2+5y^2-2xy-38x-6y+41=0, \\ 3x^2-2y^2+5xy-17x-6y+20=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x^2+9y^2-12xy-4x+6y+1=0, \\ 3x^2-2y^2+5xy-17x-6y+20=0. \end{cases}$$

Решим первое уравнение, рассматривая его как квадратное уравнение относительно переменной x.

$$4x^2-4x(3y+1)+(9y^2+6y+1)=0,$$

$$\frac{D}{4}=4(3y+1)^2-4(3y+1)^2=0.$$

Таким образом, второе уравнение системы имеет единственное решение $x=\frac{1}{2}(3y+1)$. Подставляя найденное значение во второе уравнение, получим:

$$\frac{3}{4}(3y+1)^2-2y^2+\frac{5}{2}y(3y+1)-\frac{17}{2}(3y+1)-6y+20=0$$

$$49y^2-98y+49=0$$

$$(y-1)^2=0$$

$$y=1$$

Значит, $x=2$.

Ответ: (2; 1).

Представим критерии того, что квадратный трехчлен сохраняет знак на всей числовой оси в таблице.

Условие	Критерий
1. $f(x)>0$ для любого x	1. $\begin{cases}D_f<0,\\a>0\end{cases}$
2. $f(x)\geq 0$ для любого x	2. $\begin{cases}D_f\leq 0,\\a>0\end{cases}$
3. $f(x)<0$ для любого x	3. $\begin{cases}D_f<0,\\a<0\end{cases}$
4. $f(x)\leq 0$ для любого x	4. $\begin{cases}D_f\leq 0,\\a<0\end{cases}$

Теперь рассмотрим задачи, в которых дискриминант должен быть отрицателен.

Пример 6. Найдите все значения параметра a, при которых квадратный трехчлен $(a^2-1)x^2+2(a-1)x+2$ положителен для любого x.

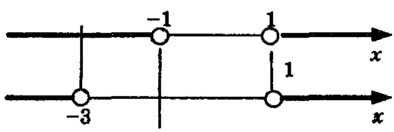
Р е ш е н и е . Согласно приведенной выше таблице искомые значения параметра задаются системой неравенств

$$\begin{cases} a^2-1>0, \\ (a-1)^2-2(a^2-1)<0 \end{cases}.$$

Первое неравенство системы — условие положительности старшего коэффициента квадратного трехчлена, второе — условие отрицательности его дискриминанта. Следует отметить, что условие отрицательности дискриминанта квадратного трехчлена при решении неравенства отнюдь не означает отсутствие решений этого неравенства.

$$\begin{cases} a^2-1>0, \\ (a-1)^2-2(a^2-1)<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a-1)(a+1)>0, \\ -a^2-2a+3<0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a-1)(a+1)>0, \\ (a-1)(a+3)>0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a<-3 \\ a>1. \end{array} \right.$$



Ответ: $(-\infty;-3)\cup(1;+\infty)$.

Пример 7. При каких значениях параметра k неравенство $\frac{x^2-kx+1}{x^2+x+1}<3$ справедливо при всех значениях x?

Р е ш е н и е.

$$\frac{x^2-kx+1}{x^2+x+1}<3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2-kx+1-3x^2-3x-3}{x^2+x+1}<0 \Rightarrow .$$

$$\Rightarrow -2x^2-(k+3)x-2<0$$

Переход от дробно-рационального неравенства к квадратному неравенству — равносильное преобразование, т.к. в знаменателе дроби стоит выражение, принимающее положительные значения при всех значениях x.

$$-2x^2-(k+3)x-2<0 \Rightarrow 2x^2+(k+3)x+2>0 .$$

Поскольку старший коэффициент квадратного трехчлена положителен, искомые значения параметра в этом случае задаются неравенством $(k+3)^2-16<0$.

$$(k+3)^2-16<0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (k-1)(k+7)<0 \Rightarrow .$$
$$\Rightarrow -7<k<1$$

Ответ: (–7; 1).

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задания с выбором ответа

42. Укажите промежуток, которому принадлежат корни квадратного уравнения $x^2-2x-4=0$.

1) $[-1;3]$ 3) $[-1;+\infty)$
2) $[-2; 4]$ 4) $(-\infty;3]$

43. Найдите сумму всех целых чисел, лежащих между корнями уравнения $10x^2+7x-12=0$.

1) -2 3) 0
2) -1 4) 1

44. Решите неравенство $x^2+6<-5x$.

1) $[-3;-1]$ 3) $(-\infty;-3)$
2) $[-4;-3]$ 4) $(-2;+\infty)$

45. Решите уравнение $5x^2+5y^2+8xy+2x-2y+2=0$.

1) $(-1;3)$ 3) $(-1;1)$
2) $(3;-1)$ 4) $(1;-1)$

46. Пусть $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений

$$\begin{cases} 3x^2-y^2-12x+4y+11=0, \\ 4x^2+2y^2-16x-8y+18=0. \end{cases}$$

Найдите x_0+y_0.

1) 4 3) $4+\sqrt{3}$
2) $-\sqrt{3}$ 4) $4-\sqrt{3}$

Задания
с кратким ответом

47. Найдите все значения параметра a, при которых квадратное уравнение $ax^2+2(a+1)x+a+3=0$ имеет два различных корня.

48. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+y+z=4, \\ 2xy-z^2=16. \end{cases}$$

49. Найдите наименьшее значение выражения

$$y=x(x+1)(x+2)(x+3).$$

50. Найдите сумму всех целых значений параметра a, при которых неравенство $\dfrac{2-ax-x^2}{1-x+x^2}\le 3$ верно при всех значениях переменной x.

51. При каком значении параметра m квадратный трехчлен $y=(6m-5)x^2-5(m-1)x+2m-6$ является полным квадратом?

Задания
с развернутым ответом

52. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $ax^2+(a-1)x+a-3<0$ верно при всех значениях переменной x.

53. При каких значениях параметра a существует единственная пара $(x; y)$, удовлетворяющая уравнению

$$ax^2+(3a+2)y^2+4axy-2ax+(4-6a)y+2=0\ ?$$

54. Найдите наибольшее значение z, для которого существуют числа x и y, удовлетворяющие уравнению

$$2x^2+2y^2+z^2+xy+xz+yz=1.$$

55. Найдите наибольшее значение выражения $(x-y)^2+(z-u)^2$, если числа x, y, z, u удовлетворяют уравнению

$$(x-1)^2+(y-4)^2+(z-3)^2+(u-2)^2=1.$$

2.3. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ КОРНЯМИ КВАДРАТНОГО ТРЕХЧЛЕНА

Пример 1. Один из корней трехчлена $5x^2-ax+12$ на 1,4 больше другого. Найдите наибольшее значение параметра a.

Р е ш е н и е . По формулам Виета получим, что $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{a}{5}, \\ x_1x_2=\dfrac{12}{5}, \\ x_1=x_2-\dfrac{7}{5}. \end{cases}$

Основная и особенно часто встречающаяся ошибка при решении задач с параметрами состоит в том, что учащиеся пытаются найти не то, что требуется в условии. В данной задаче находить корни трехчлена не нужно.

$$\left(\frac{a}{5}\right)^2=(x_1+x_2)^2=(x_2-x_1)^2+4x_1x_2.$$

Получим $\dfrac{a^2}{25}=\dfrac{49}{25}+4\dfrac{12}{5}=\dfrac{49+240}{25}=\dfrac{289}{25}$. Решим полученное уравнение: $a^2=289\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} a=17, \\ a=-17. \end{array}\right.$

Ответ: 17.

Пример 2. Найдите наибольшее значение параметра a, при котором один из корней уравнения $4x^2-15x+4a^3=0$ был бы квадратом другого.

Р е ш е н и е .

Пусть x_1, x_2 — корни квадратного уравнения. По теореме Виета получим $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{15}{4}, \\ x_1x_2=a^3, \\ x_1=x_2^2. \end{cases}$ Выразим значения корней через значение параметра: $\begin{cases} x_2=a, \\ x_1=a^2, \\ a^2+a-\dfrac{15}{4}=0. \end{cases}$

Из уравнения $a^2+a-\frac{15}{4}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\frac{3}{2} \\ a=-\frac{5}{2} \end{array}\right.$ получим, что наибольшее значение параметра, отвечающее условию задачи — число $1,5$.

Ответ: 1,5.

Пусть x_1 и x_2 — корни квадратного трехчлена

$$f(x)=ax^2+bx+c.$$

При этом имеют место следующие равносильности:

$$(x_1>0;x_2>0) \Leftrightarrow \begin{cases} D\ge 0, \\ -\frac{b}{a}>0, \\ \frac{c}{a}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D\ge 0, \\ ab<0, \\ ac>0. \end{cases}$$

$$(x_1<0;x_2<0) \Leftrightarrow \begin{cases} D\ge 0, \\ -\frac{b}{a}<0, \\ \frac{c}{a}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D\ge 0, \\ ab>0, \\ ac>0. \end{cases}$$

$$(x_1<0;\ x_2>0) \Leftrightarrow ac<0.$$

Пример 3. При каких значениях параметра k оба корня квадратного трехчлена $(2+k)x^2-2kx+3k$ положительны?

Р е ш е н и е . Искомые значения параметра задаются системой неравенств $\begin{cases} k^2-3k(2+k)\ge 0, \\ -2k(k+2)<0, \\ 3k(k+2)>0. \end{cases}$

Заметим, что второе и третье неравенства равносильны, поэтому

$$\begin{cases} k(-2k-6)\ge 0, \\ k(k+2)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k(k+3)\le 0, \\ k(k+2)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3\le k\le 0, \\ \left[\begin{array}{l} k<-2 \\ k>0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow -3\le k<-2.$$

Ответ: $[-3;-2)$.

Пример 4. Даны три уравнения

1) $x^2-(a+b)x+8=0;$

2) $x^2-b(b+1)x+c=0;$

3) $x^4-b(b+1)x^2+c=0$.

Каждое из них имеет, хотя бы один корень. Известно, что корни первого уравнения больше единицы. Известно также, что каждый корень первого уравнения является корнем третьего и, по крайней мере, один из корней первого уравнения удовлетворяет второму уравнению. Найдите числа a, b, c, если $b>3$.

Решение.

Существуют два различных по подходу (но не по результату) решения этой задачи. Первое — «лобовое» — основано на подробном анализе условий задачи и достаточно трудоемком, но поучительном процессе решения.

Пусть x_1 и x_2 — корни первого уравнения. Используя теорему Виета и условия задачи, составим следующую систему:

$$\begin{cases}(a+b)^2-32\geq 0,\\ x_1+x_2=a+b,\\ x_1x_2=8,\\ x_1^4-b(b+1)x_1^2+c=0,\\ x_2^4-b(b+1)x_2^2+c=0,\\ \left(x_1^2-b(b+1)x_1+c\right)\left(x_2^2-b(b+1)x_2+c\right)=0.\end{cases}$$

В данной системе первые три условия — запись теоремы Виета для решений первого уравнения. Четвертое и пятое уравнения — условия того, что каждый из корней первого уравнения есть решение третьего. И наконец, пятое уравнение — условие того, что хотя бы один из корней первого уравнения является корнем третьего.

Не забудем, что в условии даны еще и ограничения на величину корней первого уравнения и величину параметра b. Однако эти ограничения являются условиями отбора решений, а на само решение влияния не оказывают.

Ответ: 2; 4; 64.

Перейдем к анализу.

Так как произведение корней первого уравнения равно 8, то, конечно, ни один из них не равен нулю. Используя это условие, заменим четвертое и пятое уравнения системы следующими:

$$\begin{cases} x_1^4-b(b+1)x_1^2+c=0, \\ x_2^4-b(b+1)x_2^2+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^4-x_2^4-b(b+1)\left(x_1^2-x_2^2\right)=0, \\ x_1^4x_2^2-x_2^4x_1^2-c\left(x_1^2-x_2^2\right)=0. \end{cases}$$

Первое уравнение второй системы есть, очевидно, разность первого и второго уравнений первой системы. Второе — есть также разность этих уравнений, однако перед вычитанием каждое из них было умножено на квадрат корня уравнения, ранее не входившего в условие, т.е. первое уравнение было умножено на x_2^2, а второе — на x_1^2. Группируя в каждом из получившихся уравнений слагаемые и вынося за скобки общие множители, получим:

$$\begin{cases} (x_1-x_2)(x_1+x_2)\left(x_1^2+x_2^2-b(b+1)\right)=0, \\ (x_1-x_2)(x_1+x_2)\left(x_1^2x_2^2-c\right)=0. \end{cases}$$

Равенство суммы корней нулю невозможно, т.к. произведение корней положительно, и поэтому корни — одного знака.

Рассмотрим случай, когда $x_1=x_2$. В этом случае оба корня равны $2\sqrt{2}$. Подставляя найденные значения в оставшиеся уравнения, получим:

$$\begin{cases} a+b=4\sqrt{2}, \\ 8-2\sqrt{2}b(b+1)+c=0, \\ 64-8b(b+1)+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=4\sqrt{2}, \\ c=2\sqrt{2}b(b+1)-8, \\ \left(8-2\sqrt{2}\right)b(b+1)-56=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=4\sqrt{2}, \\ b(b+1)=\dfrac{28}{4-\sqrt{2}}, \\ c=\dfrac{56\sqrt{2}}{4-\sqrt{2}}-8. \end{cases}$$

Найдем значения параметров, решив полученные уравнения или просто вычислив их:

$$c=\frac{56\sqrt{2}}{4-\sqrt{2}}-8=\frac{56\sqrt{2}\left(4+\sqrt{2}\right)}{14}-8=4\sqrt{2}\left(4+\sqrt{2}\right)-8=16\sqrt{2};$$

$$b^2+b-2\left(4+\sqrt{2}\right)=0.$$

Если учесть условие $b>3$, то $b^2+b>12$, а $8+2\sqrt{2}<12$, поэтому решений, удовлетворяющих данным задачи нет. Однако мы ищем все решения этой задачи, поэтому $b^2+b-2\left(4+\sqrt{2}\right)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow\left[\begin{array}{l} b=2\sqrt{2} \\ b=-1-\sqrt{2} \end{array}\right.$, т.к. дискриминант этого уравнения $D=1+8\left(4+\sqrt{2}\right)=33+16\sqrt{2}=\left(1+4\sqrt{2}\right)^2$. Осталось вычислить значения последнего параметра. Если $b=2\sqrt{2}$, то $a=2\sqrt{2}$. Если же $b=-1-2\sqrt{2}$, то $a=6\sqrt{2}+1$.

Следовательно, если не учитывать условия $b>3$, то задача будет иметь, как минимум, два решения: $\left(6\sqrt{2}+1;-1-2\sqrt{2};2\sqrt{2}\right)$; $\left(2\sqrt{2};2\sqrt{2};2\sqrt{2}\right)$.

Рассмотрим теперь случай, когда выполнена система

$$\begin{cases} x_1^2+x_2^2=b(b+1), \\ x_1^2x_2^2=c \end{cases}.$$

Из данной системы сразу получим, что $c=64$. Осталось найти оставшиеся значения параметров. Используем последнее уравнение системы.

$$\left(x_1^2-b(b+1)x_1+64\right)\left(x_2^2-b(b+1)x_2+64\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x_1x_2)^2-b(b+1)x_1x_2(x_1+x_2)+64\left(x_1^2+x_2^2\right)+\left(b(b+1)\right)^2x_1x_2-$$

$$-64b(b+1)(x_1+x_2)+64^2=0.$$

По теореме Виета получим

$$b(b+1)=x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^1-2x_1x_2=(a+b)^2-16.$$

Делая соответствующую замену и обозначая $a+b=t$, получим уравнение $t^4-9t^3-24t^2+144t+648=0$. По следствию теоремы Безу (см. «Решение уравнений высших степеней») получим, что

$$t^4-9t^3-24t^2+144t+648=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (t-6)(t-9)\left(t^2+6t+12\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=6 \\ t=9 \end{array}\right.$$

Получим следующие системы $\begin{cases} a+b=6, \\ b(b+1)=20 \end{cases}$ и $\begin{cases} a+b=9, \\ b(b+1)=65 \end{cases}$.

Решая первую систему, получим наборы параметров, которые

могли бы удовлетворять задаче без учета ограничения $b>3$.
$\begin{cases} b=4, \\ a=2 \end{cases}$, $\begin{cases} b=-5, \\ a=11 \end{cases}$. С учетом условия $b>3$ удовлетворять задаче будет только первый набор значений.

Решения второй системы также не будут удовлетворять условию исходной задачи, так как если произведение корней равно 8, а сумма 9, то один корень равен 1, а второй — 8. Это противоречит условию, наложенному на величину корней первого уравнения.

Тем не менее найдем значения параметров:

$$\begin{cases} b=\dfrac{-1-\sqrt{261}}{2}, \\ a=\dfrac{19+\sqrt{261}}{2} \end{cases} \text{ и } \begin{cases} b=\dfrac{-1+\sqrt{261}}{2}, \\ a=\dfrac{19-\sqrt{261}}{2} \end{cases}.$$

Таким образом, полному условию задачи удовлетворяет лишь набор (2; 4; 64).

Ответ: (2; 4; 64).

Второе решение основано на том, что квадратное уравнение не может иметь более двух корней.

Действительно: пусть x_1 и x_2 — корни первого уравнения, и пусть, например, x_1 — корень второго уравнения. Для третьего уравнения получим: $\begin{cases} x_1^4-b(b+1)x_1^2+c=0, \\ x_2^4-b(b+1)x_2^2+c=0 \end{cases}$. Но эту же систему можно записать так: $\begin{cases} \left(x_1^2\right)^2+b(b+1)\left(x_1^2\right)+c=0, \\ \left(x_2^2\right)^2+b(b+1)\left(x_1^2\right)+c=0 \end{cases}$, откуда последует, что числа x_1^2 и x_2^2 также являются корнями второго уравнения. Таким образом, второе уравнение имеет три корня. Так как это невозможно, то либо $x_1=x_1^2$, либо $x_1=x_2^2$. Первое равенство противоречит тому условию, что корни первого уравнения больше единицы. Поэтому возможно лишь второе равенство.

$$\text{Но тогда } \begin{cases} x_2^2x_2=8, \\ a+b=x_2+x_2^2, \\ c=\left(x_2^3\right)^2, \\ b(b+1)=x_2^2+x_2^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2=2, \\ a+b=6, \\ c=64, \\ \left[\begin{array}{l} b=4 \\ b=-5 \end{array}\right. \end{cases}.$$

Отбирая подходящие значения параметров, получим

$$\begin{cases} a=2, \\ b=4, \\ c=64 \end{cases}.$$

Ответ: (2; 4; 64).

Второе решение, конечно, гораздо короче, но сделать выводы о величинах корней и их соотношении гораздо сложнее.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задания с кратким ответом

56. Найдите целое значение параметра a, при котором уравнения $x^2-2ax+5=0$ и $3x^2-4x+a=0$ имеют хотя бы один общий корень.

57. Найдите модуль разности двух целых чисел, сумма которых равна 20, а произведение 96.

58. Дано целое число, сумма квадратов цифр которого равна 65. Если к этому числу прибавить 27, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите данное число.

59. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если его периметр равен 84, а длина гипотенузы равна 37.

60. Найдите значение параметра a, при котором разность корней уравнения $2x^2-(a+1)x+(a-1)=0$ равна их произведению.

Задания с развернутым ответом

61. Даны три уравнения

1) $x^2+ax+ac=0$;

2) $x^2-bx+c^3=0$;

3) $x^4-bx^2+c^3=0$.

Каждое из них имеет, по крайней мере, один корень. Известно, что абсолютные величины корней первого уравнения больше единицы. Известно также, что каждый корень первого уравнения является корнем третьего и хотя бы один из корней первого уравнения удовлетворяет второму уравнению. Найдите числа a, b, c.

62. Даны три уравнения

1) $ax^2+bx+c=0$;

2) $cx^2+bx+a=0$;

3) $x^2+a^2x+c^2=0$.

Каждое из них имеет хотя бы один корень. Известно также, что каждый корень третьего уравнения является корнем первого и, по крайней мере, один из корней второго уравнения удовлетворяет третьему уравнению. Найдите числа a, b, c, если $a>2|c|$.

2.4. РАЦИОНАЛЬНЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Пример 1. Решите уравнение $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+4x+3}=0$.

Решение.

$$\frac{x^2+3x+2}{x^2+4x+3}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3x+2=0, \\ x^2+4x+3\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+4x+3\neq 0, \\ \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=-2.$$

Ответ: –2.

Пример 2. Решите уравнение $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x+2}=1$.

Решение.

$$\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x+2}=1 \Leftrightarrow \frac{x+2-2x+2-x^2-x+2}{(x-1)(x+2)}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+2x-6}{(x-1)(x+2)}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x-6=0, \\ (x-1)(x+2)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x+2)\neq 0, \\ \left[\begin{array}{l} x=-1-\sqrt{7} \\ x=-1+\sqrt{7} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1-\sqrt{7} \\ x=-1+\sqrt{7} \end{array}\right.$$

Ответ: $-1-\sqrt{7};-1+\sqrt{7}$.

Для упрощения вычислений при решении дробно-рациональ ных уравнений применяется метод разложения на простейшие дроби.

Пример 3. Решите уравнение $\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x}=\frac{25}{6}$.

Решение.

Поскольку

$$\frac{x}{x+1}=1-\frac{1}{x+1},\ \frac{x+1}{x+2}=1-\frac{1}{x+2},\ \frac{x+2}{x}=1+\frac{2}{x},$$

то уравнение примет вид

$$3-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}+\frac{2}{x}=\frac{25}{6}\Leftrightarrow\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}-\frac{2}{x}=-\frac{7}{6}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{7x^3+21x^2-4x-24}{6x(x+1)(x+2)}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}7x^3+21x^2-4x-24=0,\\(x+1)(x+2)x\neq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)(7x^2-14x+24)=0,\\x(x+1)(x+2)\neq0\end{cases}\Leftrightarrow x=1$$

Ответ: 1.

При решении дробно-рациональных уравнений иногда применяют метод выделения полного квадрата, методы, использующие однородность уравнения относительно некоторых функций, метод сведения к решению систем уравнений, а также метод сведения к решению некоторых специальных уравнений (квадратных, биквадратных, симметрических и т.п.).

Пример 4. Найдите наибольший корень уравнения

$$x^2+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2=8.$$

Решение.

$$x^2+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2=8\Leftrightarrow x^2+2x\frac{x}{x-1}+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2-\frac{2x^2}{x-1}=8\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(x+\frac{x}{x-1}\right)^2-2\frac{x^2}{x-1}-8=0\Leftrightarrow\left(\frac{x^2}{x-1}\right)^2-2\frac{x^2}{x-1}-8=0\Leftrightarrow.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{x^2}{x-1}=4\\\frac{x^2}{x-1}=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-4x+4=0\\x^2+2x-2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=2\\x=-1+\sqrt{3}\\x=-1-\sqrt{3}\end{array}\right.$$

Ответ: 2.

Пример 5. Решите уравнение $\frac{ax^2}{x-1}-2a=a^2+1$.

Решение.

Если $a=0$, то данное уравнение корней не имеет.

Пусть $a\neq 0$. Тогда

$$\frac{ax^2}{x-1}-2a=a^2+1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1\neq 0, \\ ax^2=(x-1)(a+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1, \\ ax^2-(a+1)^2x+(a+1)^2=0 \end{cases}$$

Вычислим дискриминант получившегося квадратного уравнения. $D=(a+1)^4-4a(a+1)^2=(a+1)^2(a-1)^2$.

Тогда получим

$$\frac{ax^2}{x-1}-2a=a^2+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1, \\ \left[\begin{array}{l} x=\frac{(a+1)^2-(a^2-1)}{2a} \\ x=\frac{(a+1)^2+(a^2-1)}{2a} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1, \\ \left[\begin{array}{l} x=1+\frac{1}{a} \\ x=a+1. \end{array}\right. \end{cases}$$

Так как $a\neq 0$, то ни один из корней уравнения не может быть равен 1.

Ответ: При $a=0$, корней нет. При $a\neq 0$ $x=1+\frac{1}{a}$, $x=1+a$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задания с выбором ответа

63. Укажите множество, которому принадлежат корни уравнения $\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x+2}=1$.

1) (–3,7; –1)
2) (–3,7; 1,7)
3) (–1,6; 1,66)
4) (–3,7; 1,7)

64. Найдите сумму квадратов корней уравнения

$$\frac{x^2+2x+1}{x^2+2x+2}+\frac{x^2+2x+2}{x^2+2x+3}=\frac{7}{6}.$$

1) 4 2) 5
3) 10 4) 1

65. Найдите сумму кубов корней уравнения $\frac{9}{x^2}+\frac{9}{(x+2)^2}=10$.

1) –21
2) –26
3) 26
4) 21

6 Найдите модуль разности целых корней уравнения

$$\left(\frac{x-1}{x}\right)^2+\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^2=\frac{40}{9}.$$

1) 1 2) 2
3) 3 4) 4

67 Произведение действительных корней уравнения

$$\frac{4x}{4x^2-8x+7}+\frac{3x}{4x^2-10x+7}=1.$$

1) $\frac{1}{2}$ 2) $\frac{7}{2}$
3) $-\frac{7}{4}$ 4) $\frac{7}{4}$

Задания с кратким ответом

68. Найдите наибольший корень уравнения $x^4+(1-x)^4=1$.

69. Найдите сумму корней уравнения $x\frac{19-x}{x+1}\left(x+\frac{19-x}{x+1}\right)=84$.

70. Найдите наибольший корень уравнения $\frac{x^2+1}{3x^2-2}=2x$.

71. Найдите произведение корней уравнения

$$\frac{1}{2x-2}+\frac{2x-1}{x^2+x+1}+\frac{3}{2x+2}=0.$$

72. Найдите действительные решения уравнения

$$\left(\frac{x+a}{2}\right)^6+\left(\frac{x-a}{2}\right)^6=a^6.$$

73. Найдите действительные корни уравнения

$$(x+a+b)^5=x^5+a^5+b^5.$$

74. Для каждого решения параметра a решите уравнение

$$\frac{ax^2}{x-1}-2a=a^2+1.$$

2.5. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

При решении систем возможны два пути:

а) совершать равносильные переходы, тогда при каждом из них множество решений сохраняется, и в конечном итоге получаются все решения системы;

б) совершать неравносильные переходы; в этом случае множество решений может измениться за счет появления решений, избавиться от которых можно путем проверки.

Пример 1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}xy=12,\\ x-2y-2=0\end{cases}.$$

Решение.

$$\begin{cases}xy=12,\\ x-2y-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2y+2,\\ (2y+2)y=12\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=2y+2,\\ y^2-y-6=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2y+2,\\ \left[\begin{array}{l}y=2\\ y=-3\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=2,\\ x=6\end{cases}\\ \begin{cases}y=-3,\\ x=-4.\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: (6; 2); (–4; –3).

Пример 2. Решите систему уравнений $\begin{cases} x+y=1, \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$.

Р е ш е н и е.

$$\begin{cases} x+y=1, \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-y, \\ (1-y)^2+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-y, \\ 2y^2-2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-y, \\ \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=0, \\ x=1 \end{cases} \\ \begin{cases} y=1, \\ x=0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: (0; 1); (1; 0).

Пример 3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (2x-5)^2+(3y-2)^2=17, \\ (2x-5)(3y-2)=4 \end{cases}.$$

Р е ш е н и е. $\begin{cases} (2x-5)^2+(3y-2)^2=17, \\ (2x-5)(3y-2)=4 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2x-5)^2+2(2x-5)(3y-2)+(3y-2)^2=25, \\ (2x-5)(3y-2)=4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ((2x-5)+(3y-2))^2=25, \\ (2x-5)(3y-2)=4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (2x-5)+(3y-2)=5, \\ (2x-5)(3y-2)=4 \end{cases} \\ \begin{cases} (2x-5)+(3y-2)=-5, \\ (2x-5)(3y-2)=4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x-5=1, \\ 3y-2=4 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x-5=4, \\ 3y-2=1 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x-5=-1, \\ 3y-2=-4 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x-5=-4, \\ 3y-2=-1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=3, \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2, \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2, \\ y=-\dfrac{2}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x=\dfrac{1}{2}, \\ y=\dfrac{1}{3} \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: (3; 2); (2; 1) (2; –2/3); (1/2; 1/3).

При решении данной системы мы воспользовались теоремой Виета, что дало возможность найти значения выражений, не составляя, по сути, сами квадратные уравнения.

Если $(x_0;\ y_0)$ — решение системы уравнений и $(y_0;\ x_0)$ — тоже решение, то такая система уравнений называется симметрической.

Решение подобных систем сводится к нахождению суммы и произведения переменных.

Введем обозначение $x+y=\sigma_1$, $xy=\sigma_2$.

Тогда, например, $x^2+y^2=\sigma_2^2-2\sigma_1$, $x^3+y^3=\sigma_1^3-\sigma_1\sigma_2$ и т.д.

Числа x и y в этом случае являются корнями уравнения $z^2-\sigma_1 z+\sigma_2=0$.

Пример 4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+3xy+y^2=61, \\ xy=12. \end{cases}$$

Решение. Обозначим $x+y=\sigma_1$, $xy=\sigma_2$.

Тогда система запишется в виде $\begin{cases} \sigma_1^2+\sigma_2=61, \\ \sigma_2=12 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sigma_2=12, \\ \sigma_1=7 \end{cases} \\ \begin{cases} \sigma_2=12, \\ \sigma_1=-7. \end{cases} \end{array}\right.$

Следовательно, система

$$\begin{cases} x^2+3xy+y^2=61, \\ xy=12 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=7, \\ xy=12 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=-7, \\ xy=12 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=3, \\ y=4 \end{cases} \\ \begin{cases} x=4, \\ y=3 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-3, \\ y=-4 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-4, \\ y=-3 \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: (3; 4); 4; 3); (–3; –4); (–4; –3).

Часто встречающимся приемом решения или, точнее, упрощения решения систем уравнений является метод разложения системы в совокупность систем. Это становится возможным при условии, если одно из уравнений каким-либо образом разложено в равносильную ему совокупность уравнений.

Пример 5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y^4 + xy^2 - 2x^2 = 0, \\ x + y = 6. \end{cases}$$

Решение.

Очевидная подстановка, состоящая в выражении какой-либо переменной из второго уравнения через другую переменную, приводит к появлению уравнения четвертой степени, решение которого проблематично, хотя и возможно.

Обратим внимание на то, что левая часть первого уравнения системы есть квадратный трехчлен относительно y^2.

Получим $y^4 + xy^2 - 2x^2 = (y^2 + 2x)(y^2 - x)$.

Мы воспользовались формулой разложения квадратного трехчлена на множители. Таким образом,

$$\begin{cases} y^4 + xy^2 - 2x^2 = 0, \\ x + y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y^2 + 2x = 0, \\ x + y = 6 \end{cases} \\ \begin{cases} y^2 - x = 0, \\ x + y = 6 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + y = 6, \\ y^2 - 2y + 6 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x + y = 6, \\ y^2 + y - 6 = 0 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 6, \\ \left[\begin{array}{l} y = -3 \\ y = 2 \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 4, \\ y = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 9, \\ y = -3. \end{cases} \end{array} \right.$$

Ответ: (4; 2); (9; –3).

Пример 6. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 6y^2 - xy - 2x + 11y = 3, \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$$

Решение.

В этом случае первое уравнение – квадратный трехчлен относительно x.

Получим: $x^2 - (y + 2)x - (6y^2 - 11y + 3) = 0$.

Дискриминант этого уравнения $D(y) = (5y - 4)^2$, поэтому

$$x^2 - (y + 2)x - (6y^2 - 11y + 3) = (x - 3y + 1)(x + 2y - 3).$$

Следовательно,

$$\begin{cases} x^2-6y^2-xy-2x+11y=3, \\ x^2+y^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+y^2=5, \\ x=3y-1 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+y^2=5, \\ x=3-2y \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-1, \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2, \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\dfrac{11}{5}, \\ y=\dfrac{2}{5} \end{cases} \\ \begin{cases} x=-\dfrac{11}{5}, \\ y=-\dfrac{2}{5}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(-1;\ 2);(2;\ 1);\left(\frac{11}{5};\frac{2}{5}\right);\left(-\frac{11}{5};-\frac{2}{5}\right)$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задания с выбором ответа

75. Пусть $(x_0;\ y_0)$ — решение системы уравнений

$$\begin{cases} x+y=5, \\ x^2-xy+y^2=7. \end{cases}$$

Найдите $x_0 \cdot y_0$.

1) 10 2) 12
3) 15 4) 20

76. Пусть $(x_0;\ y_0)$ — решение системы уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2+x+y=32, \\ 12(x+y)=7xy. \end{cases}$$

Найдите $x_0 + y_0$.

1) $\frac{4}{3}$ 2) 2 3) $\frac{3}{5}$ 4) $\frac{7}{3}$

77. Пусть $(x_0;\ y_0)$ — решение системы уравнений

$$\begin{cases} x^2-2xy+2y^2+2x-8y+10=0, \\ 2x^2-7xy+3y^2+13x-4y-7=0. \end{cases}$$

Вычислите $x_0 + y_0$.

1) 10 2) 5

3) 15 4) 7

Задания с кратким ответом

78. Найдите все целые значения a, при которых система уравнений $\begin{cases} x(x+2y-4)+4n^2=8+4y-y^2, \\ y^2-2y+2=4x(y-x+1)+2(n^2+n) \end{cases}$ имеет решение.

79. Найдите сумму всех целых значений a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} 9x^2-6xy+y^2+6x-13y+3=0, \\ 13x^2+6xy+10y^2+16x+2y-4ax-6ay+a^2-2a+3=0 \end{cases}$$

имеет решение.

80. Укажите количество решений системы уравнений

$$\begin{cases} x^2y^2-2x+y^2=0, \\ 2x^2-4x+3+y^3=0. \end{cases}$$

Задания с развернутым ответом

81. Найдите все пары чисел $(a;\, b)$, при которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2-y^2+a(x+y)=x-y+a, \\ x^2+y^2+bxy-1=0 \end{cases}$$

имеет не менее пяти решений.

82. Найдите все значения параметра b, при которых система уравнений

$$\begin{cases} 2x^2-2xy+10y^2=b^4-6b^3+9b^2-19+\sqrt{85}, \\ x^2+2xy-3y^2=4 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

83. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} 3y+2+xy=0, \\ x(y+1-a)+y(2a-3)+a+3=0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

2.6. НЕРАВЕНСТВА

Пример 1. Решите неравенство $\dfrac{x-2}{x-4}>0$.

Первый прием — неравенство сводится к рассмотрению совокупности двух систем неравенств $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-2>0,\\ x-4>0\end{cases}\\ \begin{cases}x-2<0,\\ x-4<0,\end{cases}\end{array}\right.$ каждая из которых представляет один из двух возможных случаев, когда дробь положительна. Из первой системы получаем $x > 4$, а из второй $x < 2$. Таким образом, решение этого неравенства задается совокупностью $\left[\begin{array}{l}x<2\\ x>4\end{array}\right.$.

Ответ: $(-\infty; 2) \cup (4; +\infty)$.

Другой метод — интервалов. Это известный метод.

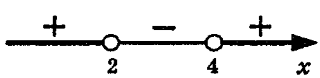
Всякое аналитическое выражение, зависящее от переменной, может менять знак в точках, в которых оно обращается в ноль, или точках, в которых график этого выражения терпит разрыв.

Указанные точки разбивают область определения выражения на интервалы, во всех точках каждого из которых значения выражения сохраняют свой знак.

В примере 1 числитель обращается в ноль при $x = 2$, а знаменатель дроби — при $x = 4$. Следовательно, выражение, стоящее в левой части неравенства, может менять свой знак только в двух точках и сохраняет свой знак на каждом из трех интервалов $(-\infty; 2)$, $(2; 4)$, $(4; +\infty)$.

Выберем на каждом из интервалов «удобную» точку и вычислим знак выражения.

Обозначим $F(x)=\dfrac{x-2}{x-4}$. Тогда $F(0)>0$, $F(3)<0$, $F(5)>0$.



Ответ: $(-\infty;2)\cup(4;+\infty)$.

Пример 2. Решите неравенство $\dfrac{2-x}{x+3}\geq 0$.

1) $(-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$
2) $(-3; 2)$
3) $[-3; 2)$
4) $(-3; 2]$

Решение.

$$F(x)=\frac{2-x}{x+3}.\ \frac{2-x}{x+3}=0 \Leftrightarrow x=2.\ x+3=0 \Leftrightarrow x=-3.$$

$\frac{2-x}{x+3} \geq 0 \Leftrightarrow -3 < x \leq 2$.

Номер верного ответа — 4).

Пример 3. Найдите сумму целых положительных чисел, удовлетворяющих неравенству $3-\frac{3x}{2}>\frac{5}{8}-\frac{4x-3}{6}$.

1) 6 2) 10
3) 15 4) 3

Решение.

$$3-\frac{3x}{2}>\frac{5}{8}-\frac{4x-3}{6} \Leftrightarrow 72-36x>15-4(4x-3) \Leftrightarrow 20x<45 \Leftrightarrow x<\frac{9}{4}.$$

Данному неравенству удовлетворяют целые положительные числа 1 и 2, сумма которых равна 3.

Номер верного ответа — 4).

Пример 4. Найдите наибольшее целое решение системы неравенств $\begin{cases} 2x+10<1{,}5x+20, \\ 3x+4<2x+16 \end{cases}$.

Решение.

$$\begin{cases} 2x+10<1{,}5x+20, \\ 3x+4<2x+16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}5x<10, \\ x<12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<20, \\ x<12 \end{cases} \Leftrightarrow x<12.$$

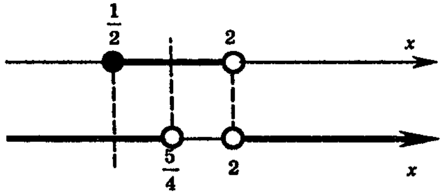
Наибольшее целое число меньшее 12 — это 11.

Ответ: 11.

Пример 5. Найдите наименьшее целое решение неравенства $1 \leq \frac{x+1}{2-x} < 3$.

Решение.

$$1 \leq \frac{x+1}{2-x} < 3 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+1}{2-x} \geq 1, \\ \frac{x+1}{2-x} < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x-1}{2-x} \geq 0, \\ \frac{4x-5}{2-x} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x < \frac{5}{4}.$$



Единственное целое решение, он же и наименьшее целое — число 1.

Ответ: 1.

Приведем пример решения сложного неравенства методом интервалов.

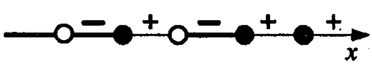
Пример 6. Решите неравенство $\frac{(x-3)^2(x-7)^2(x+1)}{(x-2)(x+4)^4} \le 0$.

Решение.

$$\frac{(x-3)^2(x-7)^2(x+1)}{(x-2)(x+4)^4} \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-4 \\ -4<x\le-1 \\ 2<x\le3 \\ x=7 \end{array}\right. .\ F(x)=\frac{(x-3)^2(x-7)^2(x+1)}{(x-2)(x+4)^4}.$$

1. $F(x)=0$ при $x=-1, x=3, x=7$

2. Точки разрыва графика $x=-4$, $x=2$.

3. 

$F(-5)<0,\ F(-3)<0,\ F(0)>0$

$F(2{,}5)<0, F(5)>0, F(8)>0$

Ответ: $(-\infty;-4)\cup(-4;-1]\cup(2;3]\cup\{7\}$.

Приведенный пример показывает, что выражение может менять свой знак, но не обязано это делать в точках, в которых оно обращается в ноль или терпит разрыв.

Рассмотрим еще один пример, иллюстрирующий ситуацию, в которой часто допускаются ошибки.

Пример 7. Решите неравенство $\frac{6(x+2)}{(x-1)(x+2)} \ge x$.

Решение. Выражения, стоящие в левой части неравенства в числителе и знаменателе содержат одинаковый множитель, при сокращении на который и появляется «запланированная» ошибка. Она состоит в том, что меняется область определения неравенства и дальнейшие преобразования не являются равносильными.

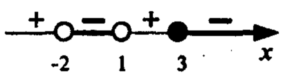
$$\frac{6(x+2)}{(x-1)(x+2)}\geq x \Leftrightarrow \frac{(x+2)(6-x^2+x)}{(x-1)(x+2)}\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+2)(x+2)(3-x)}{(x-1)(x+2)}\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-2<x<1\\ x\geq 3\end{array}\right..$$

$$F(x)=\frac{(x+2)^2(3-x)}{(x-1)(x+2)}.$$

1. $(x+2)^2(3-x)=0$ при $x=-2$ и $x=3$.

2. Точки разрыва $x=1$ и $x=-2$.

3. 

Ответ: $(-2;1)\cup[3;+\infty)$.

Пример 8. Решите неравенство $x^2+1>\dfrac{x^2-5}{x^2+2}$.

Р е ш е н и е . $x^2+1>\dfrac{x^2-5}{x^2+2}\Leftrightarrow(x^2+1)(x^2+2)>x^2-5$.

Умножение на выражение, зависящее от переменной, в данном случае является равносильным преобразованием, т.к. при всех значениях переменной оно принимает только положительные значения. Получим

$$(x^2+1)(x^2+2)>x^2-5\Leftrightarrow x^4+2x^2+5>0\Leftrightarrow -\infty<x<+\infty.$$

Ответ: $(-\infty;+\infty)$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задания с выбором ответа

84. Решите неравенство $\dfrac{x+1}{(x-1)^2}\leq 0$.

1) $(-\infty;-1]\cup(1;+\infty)$ 2) $[-1;1]$

3) $[1;+\infty)$ 4) $(-\infty;-1)$.

85. Найдите разность между наибольшим и наименьшим решениями системы неравенств $\begin{cases}(x-2)(x-3)\le 2,\\ 2x-1\le 5.\end{cases}$

1) 1
2) 2
3) 3
4) 1,5

Задания с кратким ответом

86. Найдите наибольшее целое решение системы неравенств $\begin{cases}x^2-9x+14<0,\\ x-4<0.\end{cases}$

87. Найдите наименьшее целое решение системы неравенств $\begin{cases}x^2+6x+5<0,\\ x^2+4x+3>0.\end{cases}$

88. Найдите сумму наибольшего и наименьшего решений системы неравенств $\begin{cases}\dfrac{2x-14}{x^2-x-12}\le 1,\\ 1{,}5<x<2{,}5.\end{cases}$

89. Найдите сумму целочисленных решений системы неравенств $\begin{cases}\dfrac{3x-3}{x-2}>2,\\ \dfrac{8}{x+3}\ge 1.\end{cases}$

Задания с развернутым ответом

90. Найдите сумму всех целых положительных решений системы неравенств $\begin{cases}\dfrac{x^2-4x+4}{(x+5)(x-3)}\ge 0,\\ \dfrac{9-x}{7-x}\ge 1.\end{cases}$

91. Найдите все пары целых чисел, удовлетворяющих системе неравенств $\begin{cases}2x^2+2y^2+24x-28y+167<0,\\ 2x+4y<15.\end{cases}$

92. Найдите все пары целых чисел, удовлетворяющих системе неравенств $\begin{cases}x^2+y^2<16x-22y-171,\\ 30x-y^2>252+14y+x^2.\end{cases}$

2.7. УРАВНЕНИЯ С МОДУЛЕМ

Простейшим уравнением с модулем называется уравнение вида $|f(x)| = g(x)$.

Из определения и свойств модуля непосредственно следует,

$$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ f(x) = g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0, \\ -f(x) = g(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

Но чаще бывает выгоднее использовать область значений функции $y = |f(x)|$ и записать другую систему, равносильную простейшему уравнению:

$$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f^2(x) = g^2(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x). \end{array}\right. \end{cases}$$

Пример 1. Решите уравнение $|x+2| = 2(3-x)$.

Р е ш е н и е .

$$|x+2| = 2(3-x) \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - x \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} x + 2 = 6 - 2x \\ x + 2 = 2x - 6 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3, \\ \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{4}{3} \\ x = 8 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}.$$

Ответ: $\frac{4}{3}$.

Пример 2. Решите уравнение

$$x^2 + 4|x-3| - 7x + 11 = 0.$$

Р е ш е н и е .

$$x^2 + 4|x-3| - 7x + 11 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 3, \\ x^2 + 4(x-3) - 7x + 11 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 3, \\ x^2 - 4(x-3) - 7x + 11 = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \ge 3,\\ x^2-3x-1=0\end{cases}\\ \begin{cases}x<3,\\ x^2-11x+23=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \ge 3,\\ \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{3-\sqrt{13}}{2}\\ x=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}x<3,\\ \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{11-\sqrt{29}}{2}\\ x=\dfrac{11+\sqrt{29}}{2}\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}\\ x=\dfrac{11-\sqrt{29}}{2}.\end{array}\right.$$

Ответ: $\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}; \dfrac{11-\sqrt{29}}{2}$.

Обычный метод решения уравнений, содержащих несколько выражений, стоящих под знаками модуля, — метод последовательного раскрытия модулей, или метод интервалов, который состоит в следующем.

Находятся точки, в которых каждое выражение, стоящее под знаком модуля, может менять свой знак.

Найденные точки выставляются на числовой оси. Получаем интервалы знакопостоянства выражений, стоящих под знаками модуля.

На каждом из получившихся интервалов модули выражений раскрываются с соответствующими знаками.

Исходное уравнение будет равносильно совокупности систем, в каждой из которых первое условие – неравенство, задающее интервал, а второе – получающееся уравнение.

Пример 3. Решите уравнение

$$|x+2|+|x-3|=5.$$

Решение.

$$|x+2|+|x-3|=5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-2,\\ -(x+2)-(x-3)=5\end{cases}\\ \begin{cases}-2 \le x \le 3,\\ x+2-(x-3)=5\end{cases}\\ \begin{cases}x>3,\\ x+2+x-3=5\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-2,\\ x=-2\end{cases}\\ \begin{cases}-2 \le x \le 3,\\ 5=5\end{cases}\\ \begin{cases}x>3,\\ x=3\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow -2 \le x \le 3.$$

Ответ: $[-2;3]$.

Пример 4. Решите уравнение

$$|x|+|x-2|+|2x-1|=4x-3\,.$$

Решение.

Запишем это уравнение в виде

$$|x|+|x-2|+|2x-1|=4x-3 \Leftrightarrow |x|+|x-2|+|2x-1|=x+(x-2)+(2x-1)\,.$$

Используя свойства модуля, получим

$$|x|+|x-2|+|2x-1|=x+(x-2)+(2x-1)\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0, \\ x-2\ge 0, \\ 2x-1\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\ge 2\,.$$

Ответ: [2; +∞).

Пример 5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-2|x|+3=0, \\ |y|+x-3=0. \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases} y-2|x|+3=0, \\ |y|+x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2|x|-3, \\ |2|x|-3|=3-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 3, \\ y=2|x|-3, \\ \left[\begin{array}{l} 2|x|-3=3-x \\ 2|x|-3=x-3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\le 3, \\ y=2|x|-3, \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 4x^2=(6-x)^2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 3, \\ y=2|x|-3, \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-6 \\ x=2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0, \\ y=-3 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2, \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-6, \\ y=9. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: (0; –3); (2; 1); (–6; 9).

Пример 6. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases} y=\dfrac{2x}{x-|x|}, \\ (x+a)^2+y+a=3 \end{cases}$ имеет только одно решение.

Решение.

Так как при $x\ge 0$ $x=|x|$, то данная система может иметь решение лишь при $x<0$.

Получим $\begin{cases} y=\dfrac{2x}{x-|x|}, \\ (x+a)^2+y+a=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<0, \\ y=1, \\ (x+a)^2=2-a. \end{cases}$

При $a = 2$ второе уравнение системы имеет единственное решение $x = -2$, следовательно, и система имеет единственное решение.

При $a > 2$ система решений не имеет.

При искомых значениях параметра, удовлетворяющих неравенству $a < 2$, уравнение $(x+a)^2=2-a$ должно иметь один корень отрицательный и один неотрицательный.

Рассмотрим квадратный трехчлен

$$f(x)=(x+a)^2+a-2=x^2+2ax+a^2+a-2.$$

Искомые значения параметра задаются совокупностью

$$\left[\begin{array}{l} a<2, \\ \left\{\begin{array}{l} a^2+a-2<0 \\ \left\{\begin{array}{l} a^2+a-2=0, \\ -2a<0 \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2<a<1 \\ \left\{\begin{array}{l} a>0, \\ \left[\begin{array}{l} a=-2 \\ a=1 \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow -2<a\le 1.$$

Ответ: $(-2; 1] \cup \{2\}$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задания с выбором ответа

93. Найдите сумму всех корней уравнения

$$1+3\big||x+2|-4\big|=2|x-3|.$$

1) $-23{,}5$ 2) $-23{,}1$ 3) $-22{,}4$ 4) $-18{,}2$

94. Найдите сумму квадратов всех корней уравнения

$$|x-2|-\big|4-3|x+1|\big|=1.$$

1) 15,5 2) 16 3) 17,5 4) 18,5

95. Найдите сумму квадратов корней уравнения

$$\big||x^2-5x+4|-4\big|=x.$$

1) 51 2) 52 3) 53 4) 56

Задания с кратким ответом

96. Найдите произведение корней уравнения $\frac{|x^2-4x|+3}{x^2+|x-5|}=1$.

97. Найдите сумму корней уравнения $\frac{4}{|x+1|-2}=|x+1|$.

98. Найдите все значения параметра, при которых уравнение $|x-a^2|+|x-2a|=6-a$ имеет бесконечно много корней.

99. Найдите значения параметра, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax+(a-1)y=4a+2, \\ 3|x|+2y=a-5 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Задания с развернутым ответом

100. Найдите все значения параметра a, при котором уравнение

$$\left|\frac{x^2-4ax+4a^2+1}{x-2a}\right|+x^2-2x+1=0$$

имеет хотя бы один корень.

101. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $|(a+1)x-2|=(a+1)x^2-2ax+2$ имеет единственный корень.

102. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} |x^2-7x+6|+x^2+5x+6-12|x|=0, \\ x^2-2(a-2)x+a(a-4)=0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

103. Решите уравнение $\max(2x;3-x)=\min(5+x;6x)$.

104. Найдите все значения параметра, при которых система уравнений

$$\begin{cases} y(ax+1)+13x-a(1+y)=0, \\ x-xy+|2+y|=0 \end{cases}$$

имеет решение.

2.8. НЕРАВЕНСТВА С МОДУЛЕМ

Представим простейшие неравенства с модулем и методы их решения в таблице.

Вид неравенства	Равносильные условия
$\lvert f(x)\rvert < g(x)$	$-g(x) < f(x) < g(x)$
$\lvert f(x)\rvert \le g(x)$	$-g(x) \le f(x) \le g(x)$
$\lvert f(x)\rvert > g(x)$	$\left[\begin{array}{l} f(x) > g(x) \\ f(x) < -g(x) \end{array}\right.$
$\lvert f(x)\rvert \ge g(x)$	$\left[\begin{array}{l} f(x) \ge g(x) \\ f(x) \le -g(x) \end{array}\right.$

Пример 1. Решите неравенство

$$2|x+1| > x+4.$$

Решение.

$$2|x+1| > x+4 \Leftrightarrow |2x+2| > x+4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+2 > x+4 \\ 2x+2 < -x-4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 2 \\ x < -2 \end{array}\right.$$

При решении неравенств, содержащих несколько выражений, стоящих под знаком модуля, используется метод интервалов, аналогичный методу интервалов решения соответствующих уравнений.

Находятся точки, в которых каждое выражение, стоящее под знаком модуля, может менять свой знак.

Найденные точки выставляются на числовой оси, разбивая ее на интервалы знакопостоянства выражений, стоящих под знаками модуля.

На каждом из получившихся интервалов модули выражений раскрываются с соответствующими знаками.

Исходное уравнение будет равносильно совокупности систем, в каждой из которых первое условие — неравенство, задающее интервал, а второе — получающееся неравенство.

Пример 2. Решите неравенство $|x-1|+|x-2|>x+3$.

Решение.

$$|x-1|+|x-2|>x+3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<1,\\1-x+2-x>x+3\end{cases}\\ \begin{cases}1\le x\le 2,\\x-1+2-x>x+3\end{cases}\\ \begin{cases}x>2,\\x-1+x-2>x+3\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<1,\\x<0\end{cases}\\ \begin{cases}1\le x\le 2,\\x<-2\end{cases}\\ \begin{cases}x>2,\\x>6\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x<0\\x>6\end{array}\right..$$

Ответ: $(-\infty;2)\cup(6;+\infty)$.

Пример 3. Решите неравенство

$$|2x+1|+|3x+2|\le 5x+3.$$

Используя свойства модуля, неравенство можно записать в виде $|2x+1|+|3x+2|\le 5x+3 \Leftrightarrow |2x+1|+|3x+2|\le(2x+1)+(3x+2)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2x+1\ge 0,\\3x+2\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow x\ge -\frac{1}{2}.$$

Ответ: $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Пример 4. Решите неравенство $|1-|x||<a-x$.

Решение.

Используя схему решения подобного неравенства, получим:

$$|1-|x||<a-x \Leftrightarrow x-a<1-|x|<a-x \Leftrightarrow \begin{cases}x-|x|<a-1,\\x+|x|<a+1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}|x|>a-1-x,\\|x|<1+a-x.\end{cases}$$

Снова используя схемы решения неравенств, получим

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x<1-a+x\\x>-1+a-x\end{array}\right.\\ x<1+a-x,\\ x>-1-a+x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}a>1\\x<\dfrac{a-1}{2}\end{array}\right.\\ x<\dfrac{a+1}{2},\\ a>-1.\end{cases}$$

Ответ: если $a\le -1$, то неравенство решений не имеет; если $-1<a\le 1$, то $x<\frac{a-1}{2}$; если $a>1$, то $x<\frac{a+1}{2}$.

Пример 5. Решите неравенство

$$\left|x^3-3x+1\right|\le\left|x^3+x^2-1\right|.$$

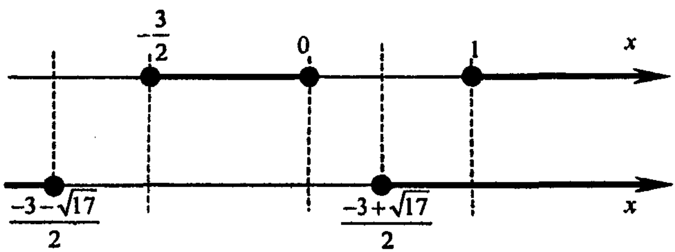
Р е ш е н и е.

$\left|x^3-3x+1\right|\le\left|x^3+x^2-1\right|\Leftrightarrow 1-x^2-x^3\le x^3-3x+1\le x^3+x^2-1$.

Запишем систему, равносильную исходному неравенству:

$$\begin{cases}2x^3+x^2-3x\ge 0,\\ x^2+3x-2\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x(x-1)(2x+3)\ge 0,\\ \left(x-\dfrac{-3-\sqrt{17}}{2}\right)\left(x-\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}\right)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x\ge 1.$$

Проиллюстрируем решение:



Ответ: $[1\,;+\infty)$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задания с выбором ответа

105. Найдите сумму целых чисел, удовлетворяющих неравенству $|3-x|<4$.

1) 15; 2) 10;
3) 21; 4) 20;

106. Укажите множество решений неравенства $|2x-7|\le 5$.

1) $(-\infty;\ 1)$ 2) $(1;\ 6)$
3) $[1;\ 6]$ 4) $(-\infty;\ 1]$

107. Решите систему неравенств $\begin{cases}\left|x^2+5x\right|<6,\\ \left|x+1\right|\le 2\end{cases}$.

1) $(-\infty;\ 2)$ 2) $(-2;\ 1)$
3) $[1;\ 3]$ 4) $(-3;\ -2]$

Задания с кратким ответом

108. Решите неравенство $2|x+1|<x+4$.

109. Решите неравенство $|x^2-3x+2|<3x-x^2-2$.

110. Решите неравенство $\left|\frac{x^2-3x-1}{x^2+x+1}\right|>3$.

111. Решите неравенство $\frac{x^2+|x|-2}{x^2+|x|-6}<0$.

Задания с развернутым ответом

112. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $x^2+2|x-a|\geq a^2$ справедливо при всех действительных значениях x.

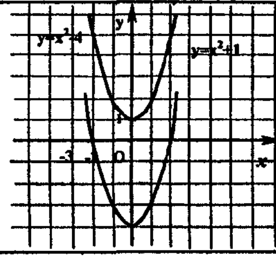
113. Найдите все значения параметра a, при которых среди решений неравенства $|x-a|+|x-2|\leq 4-a$ содержится ровно два целых числа.

114. Найдите все отрицательные значения a, при которых неравенство $|1-|x||<a-x$ имеет решения.

§ 3. Исследование свойств функции

В этом параграфе напомним основные свойства функций и приемы построения графиков функций и рассмотрим задачи, которые условно можно разделить на три типа. К первому типу отнесем задачи, связанные с «чтением графиков» (когда по графику определяют свойства функции), ко второму — с построением графиков, а к третьему — с исследованием свойств функции (по заданной формулой функции определить ее свойства).

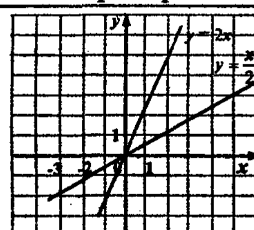
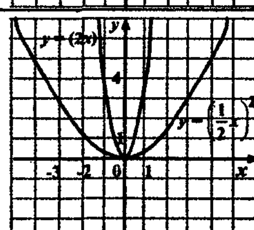
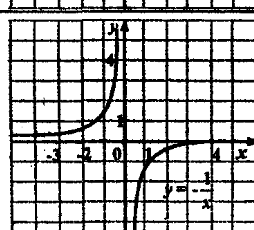
№	Вид функции	Действия	Примеры
1	$y=f(x)+a$	Параллельный перенос графика функции вдоль оси oy на a единиц вверх, если $a>0$ и вниз, если $a<0$	Нет графика

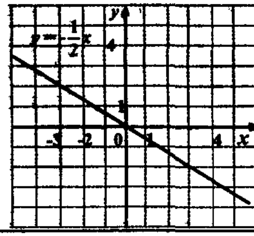
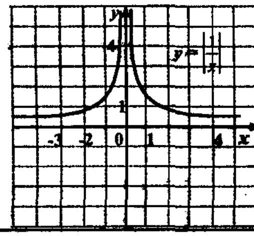
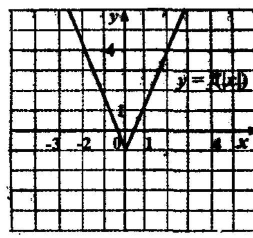
№	Вид функции	Действия	Примеры
2	$y = f(x + a)$	Параллельный перенос графика функции вдоль оси ox на a единиц влево, если $a > 0$ и вправо, если $a < 0$	

$$\Leftrightarrow 5\cdot 5^{2x} - 24\cdot 5^{x} - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5^{x} = 5 \\ 5^{x} = -\dfrac{1}{5} \end{array}\right. \Leftrightarrow 5^{x} = 5 \Leftrightarrow x = 1\,.$$

Ответ: 1.

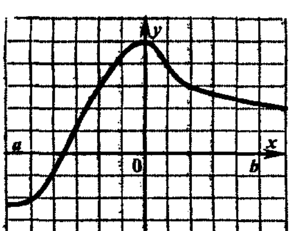
Напомним основные этапы построения графиков функций путем преобразований. Итак, если известен график функции $y = f(x)$, как построить график функции:

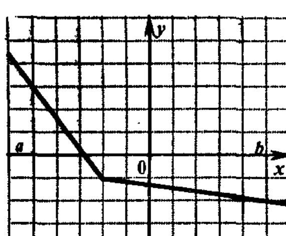
№	Вид функции	Действия	Примеры
3	$y = k{*}f(x)$, $(k > 0)$	Растяжение вдоль оси oy в k раз, если $k > 1$, сжатие в $\dfrac{1}{k}$ раз, если $0 < k < 1$	
4	$y = f(kx)$, $(k > 0)$	Сжатие вдоль оси ox в k раз, если $k > 1$, сжатие в $\dfrac{1}{k}$ раз, если $0 < k < 1$	
5	$y = f(-x)$	График функции $y = -f(x)$ симметричен графику функции $y = f(x)$ относительно оси Ox	

№	Вид функции	Действия	Примеры
6	$y = f(-x)$	График функции $y = f(-x)$ симметричен графику функции $y = f(x)$ относительно оси Oy	
7	$y = \lvert f(x) \rvert$	Чтобы построить график функции $y = \lvert f(x) \rvert$ надо часть графика, где $f(x) < 0$, отразить симметрично относительно оси Ox	
8	$y = f(\lvert x \rvert)$	Функция $y = f(\lvert x \rvert)$ — четная, поэтому чтобы построить ее график надо график $y = f(x)$ построить на той части области определения, где x 0, а затем отразить эту часть графика симметрично оси Oy	

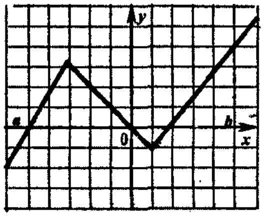
Задания с выбором ответа

Пример 1. Укажите график функции, возрастающей на отрезке $[a; b]$

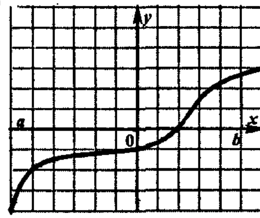
1) 

2) 

3)



4)

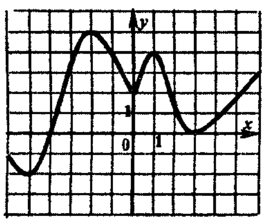


Р е ш е н и е .

Если функция возрастает на промежутке, то большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее значение функции, т.е. при движении по графику слева направо ордината графика возрастает. Этим свойством обладает только график функции на рисунке 4.

Номер верного ответа – 4).

Пример 2. Укажите область значения функции, заданной графиком.



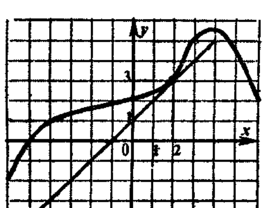
1) [-2;4] 2) [-5;5]
3)[-2;5] 4)[0;5]

Р е ш е н и е .

Из рисунка видно, что наименьшее значение функция принимает в точке $x = -5$, $f(-5) = -2$, а наибольшее — $f(-2) = 5$. Так как функция непрерывна, то область ее значений промежуток $[-2; 5]$.

Номер верного ответа — 3).

Пример 3. Укажите значение производной функции в точке графика с абсциссой $x_0 = 2$



1) 1 2) −1

3) 3 4) $\sqrt{3}$

Р е ш е н и е.

Геометрический смысл производной состоит в том, что значение производной в точке x_0 равно тангенсу угла наклона касательной, проведенной к графику в точке x_0.

Так как в точке $x_0 = 2$ касательная, проведенная к графику функции, составляет с положительным направлением оси абсцисс угол, равный 45°, а $\mathrm{tg}45° = 1$, то $f'(2) = \mathrm{tg}45° = 1$.

Номер верного ответа — 1).

Пример 4. Найдите производную функции $y = x^2 - \dfrac{2x}{x+5}$.

1) $2\left(x - \dfrac{5}{x+5}\right)$ 3) $2\left(x - \dfrac{5}{(x+5)^2}\right)$

2) $\dfrac{2x-10}{(x+5)^2}$ 4) $2x + \dfrac{10}{(x-5)^2}$.

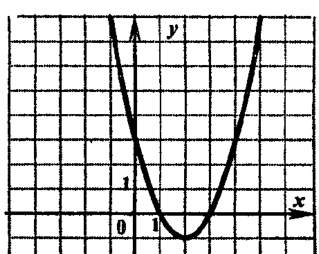
Р е ш е н и е. Продифференцируем функцию $y = x^2 - \dfrac{2x}{x+5}$:

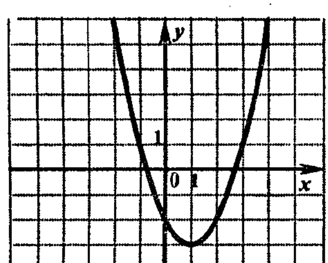
$$y' = (x^2)' - \left(\frac{2x}{x+5}\right)' = 2x - \frac{2(x+5)-2x}{(x+5)^2} =$$

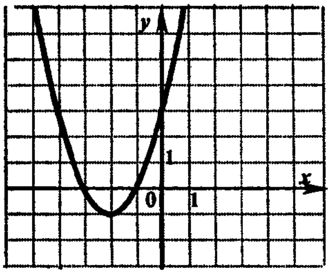
$$= 2x - \frac{10}{(x+5)^2} = 2\left(x - \frac{5}{(x+5)^2}\right).$$

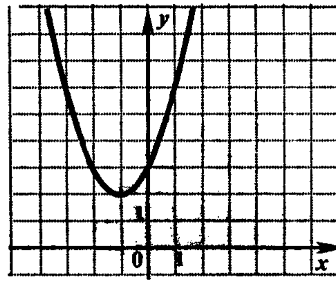
Номер правильного ответа — 3).

Пример 5. Определите рисунок, на котором изображен график функции $y = (x+2)^2 - 1$.

1) 

2) 

3) 

4) 

Решение.

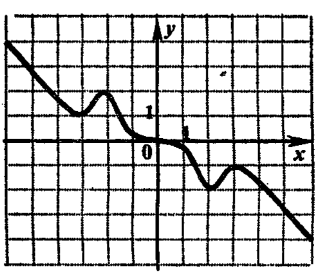
График функции $y=(x+2)^2-1$ получен из графика функции $y=x^2$ сдвигом вдоль оси абсцисс на две единицы влево и вдоль оси ординат на единицу вниз.

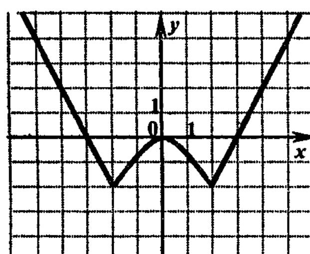
Номер верного ответа — 3).

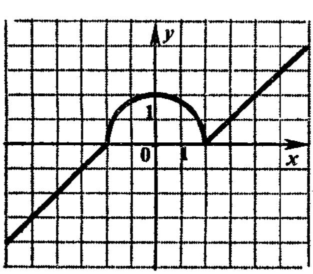
ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

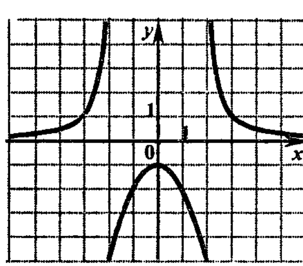
Задания с выбором ответа

115. Укажите рисунок, на котором изображен график нечетной функции.

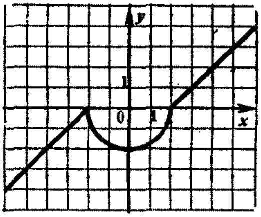
1) 

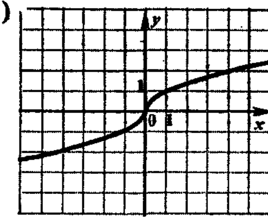
2) 

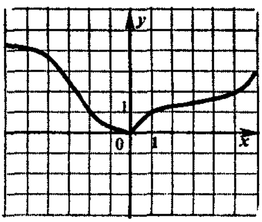
3) 

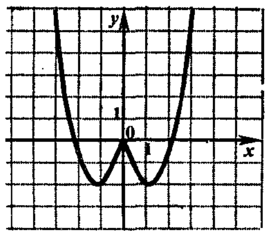
4) 

116. Укажите рисунок, на котором изображен график четной функции.

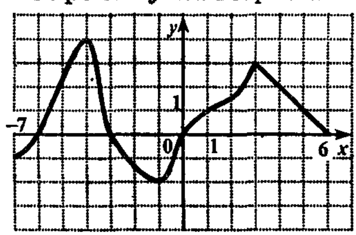
1) 

2) 

3) 

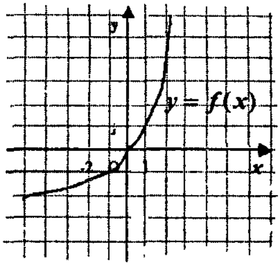
4) 

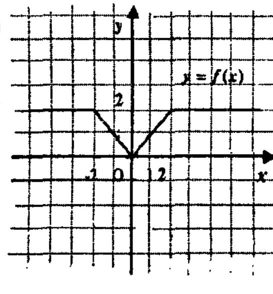
117. На рисунке изображен график функции, заданной на отрезке [–6; 6] Укажите промежутки возрастания этой функции.

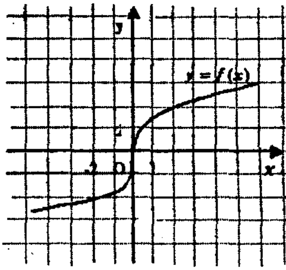


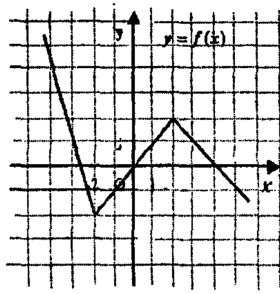
1) [–4; –1]; [3; 6]
2) [–6; 6]
3) [–6; –4]; [–1; 3]
4) [–6; –3]; [0; 6]

118. На одном из рисунков изображен график нечетной функции. Укажите этот рисунок.

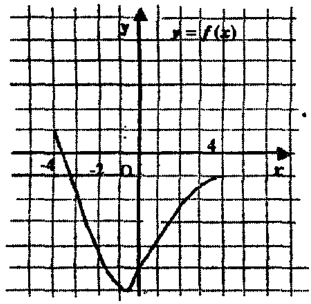
1) 

2) 

3) 

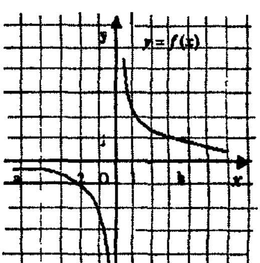
4) 

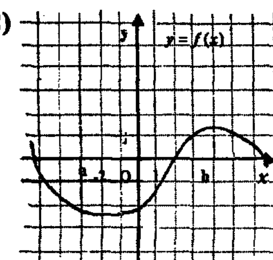
119. Функция представлена графиком на отрезке [–4; 4]. Определите множество ее значений.

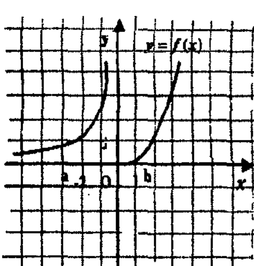


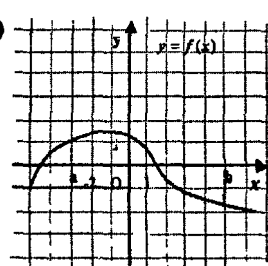
1) [-6;-1]
2) [-1;1]
3) (-6;1)
4) [-6;1]

120. Укажите график функции, убывающей на отрезке [a; b].

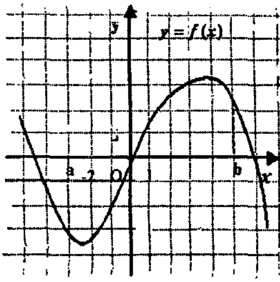
1) 

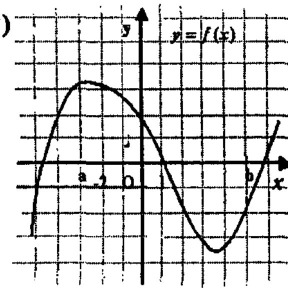
2) 

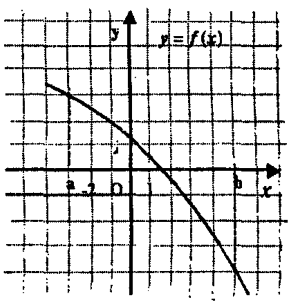
3) 

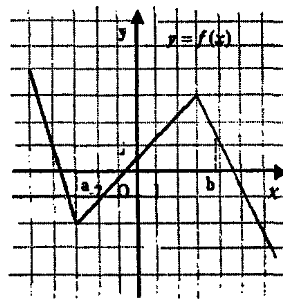
4) 

121. Укажите график функции, возрастающей на отрезке $[a; b]$.

1) 

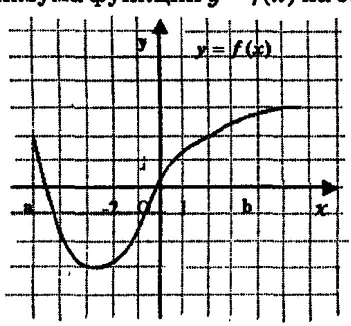
2) 

3) 

4) 

Задания с кратким ответом

122. Функции $y = f(x)$ задана графиком на интервале $(-5; 4)$. Укажите точку минимума функции $y = f(x)$ на этом интервале.



Глава 2.
Иррациональные выражения и уравнения

§ 1. Тождественные преобразования иррациональных выражений

Пример 1. Вычислите: $\sqrt[3]{\frac{3}{5}} \cdot \left(\frac{81}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$.

1) 0,6 2) 1,8
3) 5,4 4) 16,2

Решение.

Используя определение степени положительного числа с рациональным показателем и свойства арифметических корней, найдем:

$$\sqrt[3]{\frac{3}{5}} \cdot \left(\frac{81}{5}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{3}{5}} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{81}{5}\right)^2} = \sqrt[3]{\frac{3}{5}} \cdot \sqrt[3]{\frac{3^8}{5^2}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 3^8}{5 \cdot 5^2}} = \sqrt[3]{\frac{3^9}{5^3}} = \frac{3^3}{5} = \frac{27}{5} = 5,4.$$

Номер верного ответа — 3).

Пример 2. Упростите выражение $\sqrt[5]{9a^7b^3} \cdot \sqrt[5]{27a^3b^2}$.

1) $3a^2b$ 2) $3\sqrt[5]{a^{21}b^6}$
3) $3\sqrt[5]{a^4b}$ 4) $3a^3b^2$

Решение.

Используя свойства арифметического корня и степени числа, получим:

$$\sqrt[5]{9a^7b^3} \cdot \sqrt[5]{27a^3b^2} = \sqrt[5]{9a^7b^3 \cdot 27a^3b^2} = \sqrt[5]{3^5 a^{10} b^5} = \sqrt[5]{\left(3a^2b\right)^5}.$$

Поскольку извлекаем корень нечетной степени, то

$$\sqrt[5]{\left(3a^2b\right)^5} = 3a^2b.$$

Номер верного ответа — 1).

Пример 3. Найдите целое число, равное разности

$$\sqrt{\left|40\sqrt{2}-57\right|}-\sqrt{40\sqrt{2}+57}.$$

Р е ш е н и е. Поскольку $\left(40\sqrt{2}\right)^2=3200$ и $57^2=3249$, то

$$40\sqrt{2}<57 \text{ и } \left|40\sqrt{2}-57\right|=57-40\sqrt{2}.$$

При этом данное выражение принимает вид

$$\sqrt{\left|40\sqrt{2}-57\right|}-\sqrt{40\sqrt{2}+57}=\sqrt{57-40\sqrt{2}}-\sqrt{57+40\sqrt{2}}.$$

1-й способ решения.

Представим данные подкоренные выражения в виде полного квадрата:

$$57-40\sqrt{2}=25-40\sqrt{2}+32=5^2-2\cdot5\cdot4\sqrt{2}+\left(4\sqrt{2}\right)^2=\left(5-4\sqrt{2}\right)^2,$$

$$57+40\sqrt{2}=\left(5+4\sqrt{2}\right)^2.$$

Тогда

$$\sqrt{\left|40\sqrt{2}-57\right|}-\sqrt{40\sqrt{2}+57}=\sqrt{57-40\sqrt{2}}-\sqrt{57+40\sqrt{2}}=$$

$$=\sqrt{(5-4\sqrt{2})^2}-\sqrt{(5+4\sqrt{2})^2}=\left|5-4\sqrt{2}\right|-\left|5+4\sqrt{2}\right|=$$

$$=4\sqrt{2}-5-5-4\sqrt{2}=-10.$$

Таким образом, $\sqrt{\left|40\sqrt{2}-57\right|}-\sqrt{40\sqrt{2}+57}=-10.$

2-й способ решения.

Обозначим искомое число через a:

$$\sqrt{\left|40\sqrt{2}-57\right|}-\sqrt{40\sqrt{2}+57}=a.$$

Тогда $\sqrt{57-40\sqrt{2}}-\sqrt{57+40\sqrt{2}}=a.$

Возводя в квадрат обе части этого равенства, получим

$$a^2=57-40\sqrt{2}-2\sqrt{3249-3200}+57+40\sqrt{2}=100.$$

Откуда $a=10$ или $a=-10$. Так как $\sqrt{\left|40\sqrt{2}-57\right|}<\sqrt{40\sqrt{2}+57}$, то искомое число меньше нуля. Следовательно, $a=-10$.

Ответ: -10.

Пример 4. Упростите выражение

$$\sqrt{a^2-12a+36}+\sqrt{a^2+8a+16}$$

при $a\in(-4;6)$.

Р е ш е н и е . Поскольку $\sqrt{a^2-12a+36}=\sqrt{(a-6)^2}=|a-6|$ и $\sqrt{a^2+8a+16}=\sqrt{(a+4)^2}=|a+4|$, данное выражение принимает вид:

$$\sqrt{a^2-12a+36}+\sqrt{a^2+8a+16}=|a-6|+|a+4|.$$

При $a\in(-4;6)$

$$|a-6|=-(a-6)=-a+6 \text{ и } |a+4|=a+4.$$

Таким образом,

$$\sqrt{a^2-12a+36}+\sqrt{a^2+8a+16}=-a+6+a+4=10.$$

Ответ: 10.

Пример 5. Упростите выражение

$$\sqrt{a^2-12a+36}-\sqrt{4a^2+12a+9}$$

при всех допустимых значениях переменной.

Р е ш е н и е . Поскольку $\sqrt{a^2-12a+36}=\sqrt{(a-6)^2}=|a-6|$ и $\sqrt{4a^2+12a+9}=\sqrt{(2a+3)^2}=|2a+3|$, данное выражение принимает вид:

$$\sqrt{a^2-12a+36}-\sqrt{4a^2+12a+9}=|a-6|-|2a+3|.$$

При $a\in\left[-\frac{3}{2};6\right]$ $|a-6|=-(a-6)=-a+6$ и $|2a+3|=2a+3$.

Поэтому

$$\sqrt{a^2-12a+36}-\sqrt{4a^2+12a+9}=-a+6-2a-3=-3a+3.$$

При $a\in\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)$

$$\sqrt{a^2-12a+36}-\sqrt{4a^2+12a+9}=-a+6+2a+3=a+9.$$

При $a\in(6;+\infty)$

$$\sqrt{a^2-12a+36}-\sqrt{4a^2+12a+9}=a-6-2a-3=-a-9.$$

Таким образом,

$$\sqrt{a^2-12a+36}-\sqrt{4a^2+12a+9}=\left[\begin{array}{l} a+9,\ \ a<-\dfrac{3}{2} \\ -3a+3,\ -\dfrac{3}{2}\le a\le 6 \\ -a-9,\ \ a>6 \end{array}\right.$$

Ответ: $a+9$, если $a\in\left(-\infty;-\dfrac{3}{2}\right)$; если $a\in\left[-\dfrac{3}{2};6\right]$, то $-3a+3$ если $a\in(6;+\infty)$, то $-a-9$.

Пример 6. Найдите разность выражения

$$\frac{\sqrt[4]{a^2+1}}{\sqrt[4]{a^2+1}-\sqrt[4]{a^2-1}}-\frac{\sqrt{a^2-1}}{\sqrt{a^2-1}+\sqrt[4]{a^4-1}}$$

и выражения $\sqrt{a^4-1}$ при $a>1$, $a<-1$.

Решение.

Упростим сначала выражение

$$\frac{\sqrt[4]{a^2+1}}{\sqrt[4]{a^2+1}-\sqrt[4]{a^2-1}}-\frac{\sqrt{a^2-1}}{\sqrt{a^2-1}+\sqrt[4]{a^4-1}}.$$

По условию $a^2-1>0$.

По свойству арифметических корней имеем:

$$\sqrt{a^2-1}=\left(\sqrt[4]{a^2-1}\right)^2,$$

а по свойству 1

$$\sqrt[4]{a^4-1}=\sqrt[4]{(a^2-1)(a^2+1)}=\sqrt[4]{a^2-1}\cdot\sqrt[4]{a^2+1}.$$

Таким образом,

$$\frac{\sqrt[4]{a^2+1}}{\sqrt[4]{a^2+1}-\sqrt[4]{a^2-1}}-\frac{\sqrt{a^2-1}}{\sqrt{a^2-1}+\sqrt[4]{a^4-1}}=$$

$$=\frac{\sqrt[4]{a^2+1}}{\sqrt[4]{a^2+1}-\sqrt[4]{a^2-1}}-\frac{\left(\sqrt[4]{a^2-1}\right)^2}{\left(\sqrt[4]{a^2-1}\right)^2+\sqrt[4]{a^2-1}\cdot\sqrt[4]{a^2+1}}=$$

$$=\frac{\sqrt[4]{a^2+1}}{\sqrt[4]{a^2+1}-\sqrt[4]{a^2-1}}-\frac{\sqrt[4]{a^2-1}}{\sqrt[4]{a^2-1}+\sqrt[4]{a^2+1}}.$$

Приводя дроби к общему знаменателю, а затем, приводя подобные члены, получим

$$\frac{\sqrt[4]{a^2+1}}{\sqrt[4]{a^2+1}-\sqrt[4]{a^2-1}}-\frac{\sqrt[4]{a^2-1}}{\sqrt[4]{a^2-1}+\sqrt[4]{a^2+1}}=$$

$$=\frac{\sqrt[4]{a^2+1}\left(\sqrt[4]{a^2-1}+\sqrt[4]{a^2+1}\right)-\sqrt[4]{a^2-1}\left(\sqrt[4]{a^2+1}-\sqrt[4]{a^2-1}\right)}{\sqrt{a^2+1}-\sqrt{a^2-1}}=$$

$$=\frac{\sqrt{a^2+1}+\sqrt{a^2-1}}{\sqrt{a^2+1}-\sqrt{a^2-1}}.$$

Избавимся от иррациональности в знаменателе дроби, умножая числитель и знаменатель на $\sqrt{a^2+1}+\sqrt{a^2-1}$:

$$\frac{\sqrt{a^2+1}+\sqrt{a^2-1}}{\sqrt{a^2+1}-\sqrt{a^2-1}}=\frac{\left(\sqrt{a^2+1}+\sqrt{a^2-1}\right)^2}{\left(\sqrt{a^2+1}-\sqrt{a^2-1}\right)\left(\sqrt{a^2+1}+\sqrt{a^2-1}\right)}=$$

$$=\frac{2a^2+2\sqrt{a^4-1}}{2}=a^2+\sqrt{a^4-1}$$

Таким образом, искомая разность равна

$$a^2+\sqrt{a^4-1}-\sqrt{a^4-1}=a^2.$$

Ответ: a^2.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задания с выбором ответа

1. Вычислите: $16^{-0,25}\cdot(4)^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[3]{2}$.

1) 4 2) 1 3) 0,5 4) $\sqrt[3]{2}$

2. Вычислите: $\left(\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{81}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot(0,814)^0$.

1) 2 2) 1,628 3) 1 4) 0,814

3. Вычислите: $8^{-\frac{1}{4}}\cdot2^{\frac{7}{4}}+\sqrt[4]{\left(\frac{81}{16}\right)^0}$.

1) $\frac{1}{2}$ 2) 1 3) 3 4) $\sqrt[4]{2}$

4. Вычислите: $\dfrac{125^{0,5}}{25^{-0,75}}$.

1) $\dfrac{1}{25}$ 2) 5

3) 25 4) 125

5. Упростите выражение $\sqrt[3]{9a^7b^{-3}}\cdot\sqrt[3]{3a^2b^6}+\left(\sqrt[3]{3ab}\right)^0$.

1) $3a^3b+1$ 2) $3a^3b$

3) $3a^3b+\sqrt[3]{3ab}$ 4) a^3b

6. Упростите выражение

$$\sqrt[4]{\frac{x^6y^2}{4\cdot(-2)^4}}\cdot\sqrt[4]{\frac{32}{x^5y^3}}$$

при $x<0$, $y<0$.

1) $\dfrac{2}{xy}$ 2) $-\dfrac{2}{xy}$

3) $\dfrac{\sqrt{xy}}{4}$ 4) $\sqrt[4]{\dfrac{x}{2y}}$

7. Упростите выражение

$$\sqrt{\frac{x^3y}{2\cdot(-2)^2}}\cdot\sqrt[4]{\frac{4}{x^2y^6}}$$

при $x<0$, $y<0$.

1) $\dfrac{\sqrt{xy}}{2}$ 3) $\dfrac{x}{2y}$ 2) $-\dfrac{x}{2y}$ 4) $\sqrt[4]{\dfrac{x}{2y}}$

Задания с кратким ответом

8. Найдите целое число, равное разности

$$\sqrt{\left|12\sqrt{5}-29\right|}-\sqrt{12\sqrt{5}+29}.$$

9. Найдите целое число, равное разности

$$\sqrt{\left|24\sqrt{3}-43\right|}-\sqrt{24\sqrt{3}+43}.$$

10. Упростите выражение

$$\sqrt{a^2-4a+4}+\sqrt{a^2+6a+9}$$

при $a\in(-3;2)$.

11. Упростите выражение

$$\sqrt{a^2-12a+36}-\sqrt{a^2+8a+16}$$

при $a<-4$.

12. Упростите выражение

$$\sqrt{4a^2-12a+9}-\sqrt{4a^2+12a+9}$$

при $a>\dfrac{3}{2}$.

13. Упростите выражение

$$\sqrt{4a^2-12a+9}+\sqrt{4a^2+12a+9}$$

при $a\in\left(-\dfrac{3}{2};0\right)$.

14. Найдите целое число, равное разности

$$\sqrt{a-20\sqrt{a-100}}-\sqrt{a+20\sqrt{a-100}},$$

при условии, что $a>200$.

15. Найдите целое число, равное разности

$$\sqrt{a-22\sqrt{a-121}}-\sqrt{a+22\sqrt{a-121}},$$

при условии, что $a>242$.

16. Упростите выражение

$$\left(\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}-\frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^{-2}-\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}\right):\frac{(a+b)^2}{ab}$$

при $a>0, b>0$.

Ответ: 0,25.

Задания с развернутым ответом

17. Упростите выражение

$$\frac{\dfrac{a-2b}{a^{\frac{2}{3}}-\left(4b^2\right)^{\frac{1}{3}}}+\dfrac{\sqrt[3]{2a^2b}+\sqrt[3]{4ab^2}}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{4b^2}+\sqrt[3]{16ab}}}{\dfrac{a\sqrt[3]{a}+b\sqrt[3]{2b}+b\sqrt[3]{a}+a\sqrt[3]{2b}}{a+b}}.$$

18. Упростите выражение

$$\left(\sqrt[3]{\frac{b^3+2ab^2+a^2b}{b-a}}-\sqrt[3]{\frac{b^3-2ab^2+a^2b}{b+a}}\right)^{-1}\cdot\sqrt[3]{a}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{b}-\left(\frac{a^2}{b}\right)^{-1}}$$

19. Упростите выражение

$$\left(\frac{\left(a+\sqrt{ab}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(b+\sqrt{ab}\right)^{-\frac{1}{2}}-\left(a-\sqrt{ab}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\sqrt{ab}-b\right)^{-\frac{1}{2}}}{\left(a+\sqrt{ab}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(b+\sqrt{ab}\right)^{-\frac{1}{2}}+\left(a-\sqrt{ab}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\sqrt{ab}-b\right)^{-\frac{1}{2}}}\right)^2$$

при $a>b>0$.

20. Найдите значение переменной a, при которой значение выражения

$$\frac{a-a^{11}}{a^{10}\sqrt{a}+a^{10}+a^9\sqrt{a}+a^9+a^8\sqrt{a}+\ldots+a^2\sqrt{a}+a^2+a\sqrt{a}+a}$$

равно 0.2.

§ 2. *Иррациональные уравнения и их системы*

Уравнение $f(x,y,\ldots,z)=0$ называется иррациональным, если его левая часть является алгебраической иррационально функцией от указанных переменных.

Простейшими иррациональными уравнениями от одной переменной будем называть уравнения вида

$$\sqrt{f(x)}=g(x) \text{ и } \sqrt[2n+1]{f(x)}=g(x).$$

Отметим, что при решении иррациональных уравнений все корни четной степени, входящие в уравнение, являются арифметическими. Другими словами, если подкоренное выражение отрицательно, то корень лишен смысла; если подкоренное выражение равно нулю, то корень также равен нулю, если подкоренное выражение положительно, то и значение корня положительно.

Все корни нечетной степени, входящие в уравнение, определены при любом действительном значении подкоренного выражения, при этом корень имеет тот же знак, что и подкоренное выражение.

Функции $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt[2n]{x}$, $y=\sqrt[2n+1]{x}$ являются возрастающими на своей области определения.

Вид уравнения и алгоритм решения	Примеры
$\sqrt{f(x)}=g(x)\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)\geq 0,\\ f(x)=g^2(x)\end{cases}$	1. $\sqrt{x+1}=-3\Leftrightarrow\varnothing$. *Ответ*: $\varnothing$. 2. $\sqrt{1+3x}=1-x\Leftrightarrow\begin{cases}1-x\geq 0,\\ 1+3x=1-2x+x^2\end{cases}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq 1\\ x^2-5x=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq 1,\\ \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=5\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=0$ *Ответ*: 0.
$\sqrt[2n+1]{f(x)}=g(x)\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow f(x)=g^{2n+1}(x)$	$\sqrt[3]{x^3+3x^2}=x+1\Leftrightarrow x^3+3x^2=$ $=x^3+3x^2+3x+1=0\Leftrightarrow 3x+1\Leftrightarrow x=-\frac{1}{3}$. *Ответ*: $-\frac{1}{3}$.

Пример 1. Решите уравнение $\sqrt{5x-1}=x+1$.

Решение.

$$\sqrt{5x-1}=x+1\Leftrightarrow\begin{cases}x+1\geq 0,\\ 5x-1=(x+1)^2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq -1,\\ x^2-3x+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq -1\\ \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=2\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=2.\end{array}\right.$$

Ответ: 1; 2.

Пример 2. Решите уравнение: $\sqrt[3]{x+8}=2-x$.

Решение. $\sqrt[3]{x+8}=2-x.\Leftrightarrow x+8=(2-x)^3\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x+8=8-12x+6x^2-x^3\Leftrightarrow x^3-6x^2+13x=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(x^2-6x+13)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x^2-6x+13=0\end{array}\right.\Leftrightarrow x=0.$$

Квадратное уравнение, стоящее в совокупности, решений не имеет, т.к. дискриминант его отрицателен.

Ответ: 0.

Пример 3. Решите уравнение: $\sqrt{4+2x-x^2}=-x+2$.

Решение: $\sqrt{4+2x-x^2}=-x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x\geq 0, \\ 4+2x-x^2=(2-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 2, \\ 4+2x-x^2=4-4x+x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 2, \\ x^2-3x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 2, \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=0.$$

Ответ: 0.

2.1. УРАВНЕНИЯ, СВОДЯЩИЕСЯ К ПРОСТЕЙШИМ

Уравнения, сводящиеся к простейшим, решаются методами, которыми решаются либо целые, либо дробно-рациональные алгебраические уравнения.

Решим несколько уравнений, сводя их к простейшим подходящей заменой.

Пример 4. Решить уравнение $7\sqrt{x}-2x+15=0$.

Решение. $7\sqrt{x}-2x+15=0 \Leftrightarrow 2\left(\sqrt{x}\right)^2-7\sqrt{x}-15=0.$

Решим вспомогательное квадратное уравнение $2y^2-7y-15=0$, сделав замену $y=\sqrt{x}$. Заметим, что вспомогательное уравнение отнюдь не обязано быть равносильным исходному уравнению.

$$2y^2-7y-15=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\dfrac{7+13}{4} \\ y=\dfrac{7-13}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=5 \\ y=-\dfrac{3}{2} \end{array}\right..$$

Следовательно, исходное уравнение равносильно совокупности простейших иррациональных уравнений:

$$7\sqrt{x}-2x+15=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x}=5 \\ \sqrt{x}=-\dfrac{3}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow x=25.$$

Ответ: 25.

Пример 5. Решите уравнение: $\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}-2\sqrt{\frac{x-1}{2x+1}}=1$.

Решение.

$$\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}-2\sqrt{\frac{x-1}{2x+1}}=1\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}=2\\&\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}=-1\end{aligned}\right.\Leftrightarrow\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}=2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{2x+1}{x-1}=4\Leftrightarrow\frac{-2x+5}{x-1}=0\Leftrightarrow x=\frac{5}{2}.$$

$$y-\frac{2}{y}=1\Leftrightarrow\begin{cases}y\neq 0,\\y^2-y-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&y=2\\&y=-1\end{aligned}\right..$$

Ответ: $\frac{5}{2}$.

2.2. УРАВНЕНИЯ, СОДЕРЖАЩИЕ НЕСКОЛЬКО РАДИКАЛОВ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ

При решении указанных уравнений следует придерживаться следующего алгоритма.

Все подкоренные выражения записываются в системе ограничений как неотрицательные.

Радикалы располагаются по обеим частям уравнения таким образом, чтобы обе части получившегося уравнения стали неотрицательными при всех допустимых значениях переменной.

После выполнения двух первых пунктов алгоритма, обе части уравнения можно возвести в квадрат, причем получившееся уравнение будет равносильно исходному уравнению.

После приведения подобных слагаемых и уединения оставшегося радикала получившееся уравнение решается как простейшее, с введением дополнительных ограничений, следующих из алгоритма решения простейшего уравнения.

Пример 6. Решите уравнение $\sqrt{7x+1}=2\sqrt{x+4}$.

Решение.

$$\sqrt{7x+1}=2\sqrt{x+4}\Leftrightarrow\begin{cases}7x+1\geq 0,\\x+4\geq 0,\\7x+1=4(x+4)\end{cases}\begin{cases}x\geq-\frac{1}{7},\\3x=15\end{cases}\Leftrightarrow x=5.$$

Ответ: 5.

Пример 7. Решите уравнение $\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}=2$.

Решение. $\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}=2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2\geq 0, \\ 3-x\geq 0, \\ x+2+2\sqrt{(x+2)(3-x)}+3-x=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\leq x\leq 3, \\ 2\sqrt{(x+2)(3-x)}=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing.$$

Ответ: корней нет

Пример 8. Решите уравнение $\sqrt{2x-4}-\sqrt{x+5}=1$.

Решение. $\sqrt{2x-4}-\sqrt{x+5}=1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-4\geq 0, \\ x+5\geq 0, \\ 2x-4=\left(1+\sqrt{x+5}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 2, \\ 2x-4=1+2\sqrt{x+5}+x+5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 2, \\ 2\sqrt{x+5}=x-10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 2, \\ x\geq 10, \\ 4(x+5)=(x-10)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 10, \\ x^2-24x+80=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 10, \\ \left[\begin{array}{l} x=20 \\ x=4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=20.$$

Ответ: 20.

Пример 9. Решите уравнение: $2\sqrt{x}+\sqrt{5-x}=\sqrt{x+21}$.

Решение. $2\sqrt{x}+\sqrt{5-x}=\sqrt{x+21} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0, \\ 5-x\geq 0, \\ x+21\geq 0, \\ 4x+4\sqrt{x(5-x)}+5-x=x+21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\leq x\leq 5, \\ 2\sqrt{x(5-x)}=8-x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0\leq x\leq 5, \\ 4x(5-x)=64-16x+x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\leq x\leq 5, \\ 5x^2-36x+64=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0\leq x\leq 5, \\ \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=\dfrac{16}{5} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4, \\ x=\dfrac{16}{5}. \end{array}\right.$$

$$5x^2-36x+64=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{18+2}{5} \\ x=\dfrac{18-2}{5} \end{array}\right. \cdot \frac{D}{4}=324-320=4.$$

Ответ: 4; $\dfrac{16}{5}$.

Пример 10. Решите уравнение

$$\sqrt{x+3}+\sqrt{x+4}=\sqrt{x+2}+\sqrt{x+7}.$$

Решение.

В данном уравнении содержится четыре радикала второй степени, но корни этого уравнения найти можно, применив следующий алгоритм:

$$\sqrt{x+3}+\sqrt{x+4}=\sqrt{x+2}+\sqrt{x+7} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2\geq 0, \\ \left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x+4}\right)^2=\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+7}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -2, \\ x+3+2\sqrt{(x+3)(x+4)}+x+4=x+2+2\sqrt{(x+2)(x+7)}+x+7 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -2, \\ \sqrt{(x+3)(x+4)}=1+\sqrt{(x+2)(x+7)} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -2, \\ x^2+7x+12=1+2\sqrt{(x+2)(x+7)}+x^2+9x+14 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -2, \\ 2\sqrt{(x+2)(x+7)}=-2x-3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2\leq x\leq -\dfrac{3}{2}, \\ 4\left(x^2+9x+14\right)=4x^2+12x+9 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2\leq x\leq -\dfrac{3}{2}, \\ 24x=-47 \end{cases} \Leftrightarrow x=-\frac{47}{24}.$$

Ответ: $-\dfrac{47}{24}$.

2.3. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, СОДЕРЖАЩИЕ ДВА ИЛИ ТРИ КОРНЯ ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНИ

Для решения иррациональных уравнений, содержащих два или три корня третьей степени, обычно предлагается несколько способов, однако при любом из них рекомендуется делать проверку полученного результата. Обычно уравнения такого вида решаются двумя способами — методом «замены» и методом составления системы уравнений.

Пример 11. Решите уравнение $\sqrt[3]{x-7}+\sqrt[3]{5-x}=1$.

Решение. Рассмотрим сначала метод «замены». Возведем обе части уравнения в куб. (Заметим, что возведение в нечетную степень является равносильным преобразованием, т.е. появление посторонних корней невозможно). Получим:

$$x-7+5-x+3\sqrt[3]{(x-7)(5-x)}\left(\sqrt[3]{x-7}+\sqrt[3]{5-x}\right)=1.$$

Приведем подобные члены и сделаем замену суммы $\sqrt[3]{x-7}+\sqrt[3]{5-x}$ на 1, как обычно рекомендуется. Тогда уравнение приведется к виду $\sqrt[3]{-x^2+12x-35}=1$.

Возводя опять в куб, имеем:

$$x^2-12x+36=0 \Leftrightarrow (x-6)^2=0 \Leftrightarrow x=6.$$

Однако проверка показывает, что 6 не является решением данного уравнения.

Решим это же уравнение методом составления системы.

Пусть $\sqrt[3]{x-7}=a$, $\sqrt[3]{5-x}=b$.

Тогда:

$$\begin{cases} a+b=1 \\ a^3+b^3=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ (a+b)^3-3ab(a+b)=-2 \end{cases}.$$

Второе уравнение системы подбирается таким образом, чтобы линейная комбинация подкоренных выражений давала постоянную величину.

Снова делая ту же замену, получим: $\begin{cases} a+b=1, \\ ab=1. \end{cases}$

По теореме Виета числа a и b должны являться корнями квадратного уравнения $z^2-z+1=0$, но оно корней не имеет.

Ответ: корней нет.

Пример 12. Решите уравнение $\sqrt[3]{8+x}+\sqrt[3]{8-x}=1$.

Р е ш е н и е.

Применяя метод «замены», получим: $16+3\sqrt[3]{64-x^2}\cdot 1=1$.

Откуда $\left[\begin{array}{l} x=\sqrt{189} \\ x=-\sqrt{189}. \end{array}\right.$

Теперь надо проверить, будет ли число $\sqrt[3]{8+\sqrt{189}}+\sqrt[3]{8-\sqrt{189}}$ равно 1.

Рассмотрение подобных сравнений само по себе представляет довольно популярную задачу.

Второй способ. $\sqrt[3]{8+x}=a$, $\sqrt[3]{8-x}=b$.

$$\begin{cases} a+b=1, \\ a^3+b^3=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1, \\ (a+b)^3-3ab(a+b)=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1, \\ ab=-5. \end{cases}$$

Опять получим, что a и b — корни уравнения

$$z^2-z-5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=\dfrac{\sqrt{21}+1}{2} \\ z=\dfrac{1-\sqrt{21}}{2}. \end{array}\right.$$

В этом случае нам еще предстоит вычислить значение искомой переменной, решив уравнение $\sqrt[3]{8+x}=\dfrac{\sqrt{21}+1}{2}$.

Получим, что $x=3\sqrt{21}=\sqrt{189}$.

Решая второе уравнение, найдем, что в этом случае корни совпали, правда, это уже не сможет убедить нас в том, что проверку делать не надо.

Так почему и когда при решении подобных уравнений возникают посторонние корни? Ответ прост — метод «замены» проводится не равносильными преобразованиями, а является переходом от уравнения к следствию.

Основой решения является условное тождество:

если $a+b+c=0$, то $a^3+b^3+c^3=3abc$.

Действительно: $a+b+c=0$, $c=-(a+b)$.

$$a^3+b^3+c^3=a^3+b^3-(a+b)^3=(a+b)(-3ab)=3abc.$$

Но если $a^3+b^3+c^3=3abc$, то $\left[\begin{array}{l} a=b=c \\ a+b+c=0. \end{array}\right.$

Действительно:

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\left(\frac{1}{2}(a-b)^2+\frac{1}{2}(b-c)^2+\frac{1}{2}(c-a)^2\right).$$

Поэтому в методе «замены» лишние корни получаются в том случае, когда существуют такие значения переменной, при которых все три слагаемых равны между собой и, конечно, не равны при этом нулю. В других случаях посторонние корни не появляются.

Например, переписав первое уравнение в виде $\sqrt[3]{x-7}+\sqrt[3]{5-x}-1=0$, получим, что при $x=6$ все слагаемые равны -1.

Во втором уравнении подкоренные выражения принимают равные значения при $x=0$, но $\sqrt[3]{8}\neq-1$, поэтому найденные решения искомые.

Пример 13. Решите уравнение $\sqrt[3]{2x+3}+\sqrt[3]{2x+1}=\sqrt[3]{1-2x}$.

Решение. Запишем уравнение в виде

$$\sqrt[3]{2x+3}+\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[3]{2x-1}=0.$$

Очевидно, что подкоренные выражения, а, следовательно, и слагаемые не могут одновременно быть равны, поэтому посторонние корни не появятся. Воспользуемся доказанным тождеством.

$$2x+3+2x+1+2x-1=3\sqrt[3]{(2x+3)(2x+1)(2x-1)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(2x+1)=\sqrt[3]{(2x+1)(2x+3)(2x-1)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(2x+1)^3=(2x+1)(2x+3)(2x-1)\Leftrightarrow(2x+1)\cdot4=0\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}.$$

Ответ: $-\frac{1}{2}$.

Пример 14. Решите уравнение $\sqrt[3]{54+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{54-\sqrt{x}}=\sqrt[3]{18}$.

Решение.

$$\sqrt[3]{54+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{54-\sqrt{x}}=\sqrt[3]{18}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq0,\\54+\sqrt{x}+54-\sqrt{x}-18\end{cases}=$$

$$=-3\sqrt[3]{18(54^2-x)}\Leftrightarrow30=\sqrt[3]{18(x-54^2)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow1500=x-2916\Leftrightarrow x=4416.$$

Ответ: 4416.

Следует отметить, что применение условного тождества для решения данного типа задач предпочтительнее метода систем, в котором можно испытывать трудности при решении уравнений, содержащих три корня.

2.4. РЕШЕНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ РАДИКАЛЫ РАЗЛИЧНЫХ СТЕПЕНЕЙ

Часто иррациональное уравнение содержит радикалы различных степеней. В этом случае подобные уравнения решаются либо методом замены переменной, либо методом составления систем. Сразу отметим, что введение новых переменных и, тем более, переход к системе не относится к равносильным преобразованиям.

Пример 15. Решите уравнение $\sqrt{\frac{3-x}{2+x}}+3\cdot\sqrt{\frac{2+x}{3-x}}=4$.

Решение. $\sqrt{\frac{3-x}{2+x}}+3\cdot\sqrt{\frac{2+x}{3-x}}=4$.

Ведем новую переменную $t=\sqrt{\frac{3-x}{2+x}}$ и решим вспомогательное уравнение $t+\frac{3}{t}=4$.

$$t+\frac{3}{t}=4 \Leftrightarrow \frac{t^2-4t+3}{t}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t\neq 0, \\ \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=3 \end{array}\right..$$

Получим, что исходное уравнение будет равносильно совокупности двух простейших иррациональных уравнений

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{\frac{3-x}{2+x}}=1 \\ \sqrt{\frac{3-x}{2+x}}=3 \end{array}\right. \cdot \left[\begin{array}{l} \sqrt{\frac{3-x}{2+x}}=1 \\ \sqrt{\frac{3-x}{2+x}}=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{3-x}{2+x}=1 \\ \frac{3-x}{2+x}=9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3-x=2+x \\ 3-x=18+9x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{2} \\ x=-\frac{3}{2} \end{array}\right..$$

Ответ: $\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{2}$.

Пример 16. Решите уравнение $\sqrt[3]{24+x}+\sqrt{12-x}=6$.

Решение. Применим метод составления систем уравнений. Обозначим $\sqrt[3]{24+x}=a, \sqrt{12-x}=b$.

Тогда новые переменные будут связаны соотношениями

$$\begin{cases} a+b=6, \\ a^3+b^2=36 \end{cases}.$$

Получим

$$\begin{cases} a+b=6, \\ a^3+b^2=36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=6-a, \\ a^3+36-12a+a^2=36 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=6-a, \\ a^3+a^2-12a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=6-a, \\ \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=-4 \\ a=3 \end{array}\right. \end{cases}.$$

Делая обратную замену, получим $\left[\begin{array}{l} x=-24 \\ x=-88 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Ответ: –24, –88, 3.

Пример 17. Решите уравнение $\sqrt[4]{41+x}+\sqrt[4]{41-x}=2$.

Р е ш е н и е. Обозначим $41+x=u, 41-x=v$.

Составим систему $\begin{cases} u^4+v^4=82, \\ u+v=2 \end{cases}$.

Воспользуемся симметричностью полученной системы уравнений. Ее действительные решения $\begin{cases} u=3, \\ v=-1 \end{cases}$ или $\begin{cases} u=-1, \\ v=3. \end{cases}$

Ни одно из этих решений не удовлетворяет условию одновременной неотрицательности подкоренных выражений $u \geq 0,\ v \geq 0$. Таким образом, исходное уравнение корней не имеет.

Ответ: корней нет.

2.5. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МОНОТОННОСТИ ФУНКЦИИ

Пример 18. Решите уравнение $x^3+1=2\sqrt[3]{2x-1}$.

Р е ш е н и е.

Запишем данное уравнение в виде $x=\sqrt[3]{2\sqrt[3]{2x-1}-1}$ и рассмотрим функцию $f(t)=\sqrt[3]{2t-1}$. Данная функция представляет суперпозицию монотонно возрастающих функций, поэтому также является монотонно возрастающей.

Следовательно,

$$x=\sqrt[3]{2\sqrt[3]{2x-1}-1}\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{2x-1}\Leftrightarrow x^3=2x-1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^3-2x+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\\ x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\end{array}\right..$$

Ответ: $1;\ \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2};\ \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Пример 19. Для каждого положительного значения параметра a решите уравнение $\sqrt{a+\sqrt{a+x}}=x$.

Р е ш е н и е.

Аналогично предыдущему примеру получим, что

$$\sqrt{a+\sqrt{a+x}}=x\Leftrightarrow x=\sqrt{x+a}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0,\\ x^2-x-a=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0,\\ \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1-\sqrt{1+4a}}{2}\\ x=\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{4}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}.$$

Ответ: $\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2},\ a>0$.

Пример 20. Решите уравнение

$$(2x+1)\left(\sqrt{(2x+1)^2+7}+1\right)+3x\left(\sqrt{9x^2+7}+1\right)=0.$$

Р е ш е н и е.

Рассмотрим функцию $f(t)=t\left(\sqrt{t^2+7}+1\right)$.

Данная функция определена для любого значения аргумента, нечетна, т.к. $f(-t)=-t\left(\sqrt{t^2+7}+1\right)=-f(t)$.

Найдем производную:

$$f'(t)=\left(\sqrt{t^2+7}+1\right)+t\cdot\frac{t}{\sqrt{t^2+7}}=\left(\sqrt{t^2+7}+1\right)+\frac{t^2}{\sqrt{t^2+7}}.$$

Так как производная данной функции положительна, то сама функция монотонно возрастает.

Поэтому исходное уравнение можно записать в виде

$$f(2x+1)+f(3x)=0.$$

$$f(2x+1)+f(3x)=0 \Leftrightarrow f(2x+1)=-f(3x) \Leftrightarrow f(2x+1)=f(-3x).$$

Мы воспользовались нечетностью функции. Учитывая монотонное возрастание функции, получим

$$f(2x+1)=f(-3x) \Leftrightarrow 2x+1=-3x \Leftrightarrow x=-\frac{1}{5}.$$

Ответ: $-\frac{1}{5}$.

Пример 21. Решите уравнение

$$3x+2|x-2|=3\sqrt{3x+18}+2\left|\sqrt{3x+18}-2\right|.$$

Решение.

Рассмотрим функцию $f(t)=3t+|t-2|=\left[\begin{array}{l}4t-2,\ t\geq 2,\\ 2t+2,\ t\leq 2\end{array}\right.$. Данная функция возрастает на каждом из множеств $(-\infty;2]$ и $[2;+\infty)$. Поэтому, записав уравнение в виде $f(x)=f\left(\sqrt{3x+18}\right)$, в силу монотонности функции получим, что оно равносильно уравнению $x=\sqrt{3x+18}$.

$$x=\sqrt{3x+18} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0, \\ x^2-3x-18=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} x=6 \\ x=-3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=6.$$

Ответ: 6.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задания с выбором ответа

21. Найдите сумму квадратов корней уравнения

$$(x^2-1)\sqrt{2x-1}=0.$$

1) 1,25
2) 2
3) 1
4) 2,25

22. Найдите модуль суммы корней уравнения

$$\sqrt{2x+6}-\sqrt{x+1}=2.$$

1) 16
2) 12
3) 14
4) 13

23. Найдите модуль разности корней уравнения

$$\sqrt{4x+8}-\sqrt{3x-2}=2.$$

1) 36
2) 32
3) 34
4) 33

24. Найдите сумму корней уравнения

$$(5x+2)\sqrt{1-x}+(5x-7)\sqrt{x}=0.$$

1) 0,8
2) 0,5
3) 0,2
4) 1,5

25. Найдите сумму положительных корней уравнения

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{35}{12}.$$

1) 0,8
2) 1,2
3) 0,6
4) 1,4

Задания с кратким ответом

26. Решите уравнение $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}=\sqrt{34+x}-\sqrt{7+x}$.

27. Найдите наименьший корень уравнения

$$\sqrt{x^2+2x+1}-\sqrt{x^2-4x+4}=3.$$

28. Найдите сумму корней уравнения

$$\sqrt[3]{24+\sqrt{x}}-\sqrt[3]{5+\sqrt{x}}=1.$$

29. Найдите сумму корней уравнения

$$\sqrt{x^2+x+4}+\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{2x^2+2x+9}.$$

30. Найдите сумму корней уравнения $x^3-7\sqrt[3]{7x-6}=6$.

Задания с развернутым ответом

31. Решите уравнение

$$\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{3x^2-1}=\sqrt{3x^2+2x+1}+\sqrt{x^2+2x+4}.$$

32. Решите уравнение

$$\sqrt{(x+2)(2x-1)}-3\sqrt{x+6}=4-\sqrt{(x+6)(2x-1)}+3\sqrt{x+2}.$$

33. Решите уравнение

$$\sqrt{x^2-2x+2}\,(5x-3)=5x^2-8x+1.$$

34. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\sqrt[3]{8x^2-7x+2}+\sqrt[3]{2x^2-7x+8}=\sqrt[3]{(3a-22)x^2-(6a+97)x+3a+32}+$$
$$+\sqrt[3]{(20a-198)x^2-(40a-607)x+20a+208}$$

имеет два корня, причем оба они меньше единицы.

35. Решите уравнение

$$2x+1+x\sqrt{x^2+2}+(x+1)\sqrt{x^2+2x+3}=0.$$

Ответ: $-\dfrac{1}{2}$

Глава 3. Показательные уравнения, неравенства, функции

§ 1. Тождественные преобразования показательных выражений

Пример 1. Представьте в виде степени с основанием a выражение $\dfrac{\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^2\cdot\sqrt[6]{a}}{a\cdot a^{-\frac{1}{6}}}$.

1) a 3) $a^{-\frac{2}{3}}$

2) $a^{\frac{2}{3}}$ 4) $a^{\frac{3}{2}}$

Решение.

Используя свойства степени положительного числа с действительным показателем, получаем:

$$\frac{\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^2\cdot\sqrt[6]{a}}{a\cdot a^{-\frac{1}{6}}}=\frac{\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^2\cdot a^{\frac{1}{6}}}{a^{1-\frac{1}{6}}}=\frac{a^{\frac{4}{3}+\frac{1}{6}}}{a^{\frac{5}{6}}}=\frac{a^{\frac{9}{6}}}{a^{\frac{5}{6}}}=a^{\frac{4}{6}}=a^{\frac{2}{3}}.$$

Номер верного ответа — 2).

Пример 2. Вычислите значение выражения $\dfrac{2^9\cdot\sqrt[5]{16}\ 8^0}{4^4\ 2^{-\frac{1}{5}}}$.

1) 1 2) 1/4

3) 1/2 4) 4

Решение.

Представив все сомножители, входящие в выражение, в виде степени числа 2, получаем:

$$\frac{2^9\cdot\sqrt[5]{16}\cdot 8^0}{4^4\cdot 2^{-\frac{1}{5}}}=\frac{2^9\cdot 2^{\frac{4}{5}}\cdot 2^0}{2^8\cdot 2^{-\frac{1}{5}}}=\frac{2^{10}}{2^8}=2^2=4.$$

Номер верного ответа — 4).

Пример 3. Расположите числа $7^{-0,3}$, $7^{0,3}$, $7^{-0,4}$, $7^{0,4}$ в порядке возрастания.

1) $7^{-0,3} < 7^{-0,4} < 7^{0,3} < 7^{0,4}$;

2) $7^{-0,4} < 7^{-0,3} < 7^{0,4} < 7^{0,3}$;

3) $7^{-0,4} < 7^{-0,3} < 7^{0,3} < 7^{0,4}$;

4) $7^{-0,4} < 7^{0,4} < 7^{-0,3} < 7^{0,3}$.

Решение.

Так как $7 > 1$, имеем

$$-0,4 < -0,3 \Rightarrow 7^{-0,4} < 7^{-0,3} \text{ и } -0,3 < 0,3 \Rightarrow 7^{-0,3} < 7^{0,3};$$

$$0,3 < 0,4 \Rightarrow 7^{0,3} < 7^{0,4}.$$

Откуда получаем $7^{-0,4} < 7^{-0,3} < 7^{0,3} < 7^{0,4}$.

Номер верного ответа — 3).

Пример 4. Дана функция $f(x) = 0,1^x$. Найдите значение выражения $f(0) + 2 \cdot f(-1) + 3f(-2) + 4f(-3)$.

Решение.

Так как $f(0) = 1$, а $f(-n) = 10^n$, то получаем, что

$$f(0) + 2 \cdot f(-1) + 3f(-2) + 4f(-3) = 1 + 20 + 300 + 4000 = 4321.$$

Ответ: 4321.

Пример 5. Дана функция $f(x) = 2^x$. Найдите сумму

$$f(0) + f(-1) + f(-2) + \ldots + f(-n) + \ldots$$

Решение.

Так как $f(-n) = \dfrac{1}{2^n}$, то

$$f(0) + f(-1) + f(-2) + \ldots + f(-n) + \ldots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots$$

Используя формулу суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом $b_1 = 1$ и знаменателем $q = \dfrac{1}{2}$, получаем $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \ldots = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$.

Ответ: 2.

Пример 6. Найдите значение выражения $\left(\dfrac{3^{-3^2}\left(3^3\right)^{-2}}{\left(3^{3^{-2}}\right)^{18}}\right)^{-\frac{x}{17}}$ при $x=2$.

Решение.

Используя свойства степени, получаем:

$$\left(\frac{3^{-3^2}\left(3^3\right)^{-2}}{\left(3^{3^{-2}}\right)^{18}}\right)^{-\frac{x}{17}}=\left(\frac{3^{-9}\cdot 3^{-6}}{\left(3^{\frac{1}{9}}\right)^{18}}\right)^{-\frac{2}{17}}=\left(\frac{3^{-15}}{3^2}\right)^{-\frac{2}{17}}=\left(3^{-17}\right)^{-\frac{2}{17}}=3^2=9.$$

Ответ: 9.

Пример 7. Дана функция

$$f(x)=\frac{9^x-2^x}{9^{\frac{3x}{4}}-9^{\frac{x}{2}}\cdot 2^{\frac{x}{4}}}:\frac{9^{\frac{x}{2}}+2^{\frac{x}{2}}}{2^{\frac{x}{2}}\cdot 9^{\frac{x}{4}}-9^{\frac{x}{2}}\cdot 2^{\frac{x}{4}}}\cdot\frac{9^{\frac{x}{4}}\cdot 2^{-\frac{x}{4}}}{9^{\frac{x}{2}}+2\cdot 9^{\frac{x}{4}}\cdot 2^{\frac{x}{4}}+2^{\frac{x}{2}}}.$$

Найдите $f(4)$.

Решение.

Обозначим: $9^{\frac{x}{4}}=a,\quad 2^{\frac{x}{4}}=b$. Тогда

$$\frac{9^x-2^x}{9^{\frac{3x}{4}}-9^{\frac{x}{2}}\cdot 2^{\frac{x}{4}}}=\frac{a^4-b^4}{a^3-a^2b}=\frac{(a-b)(a+b)\left(a^2+b^2\right)}{a^2(a-b)};$$

$$\frac{9^{\frac{x}{2}}+2^{\frac{x}{2}}}{2^{\frac{x}{2}}\cdot 9^{\frac{x}{4}}-9^{\frac{x}{2}}\cdot 2^{\frac{x}{4}}}=\frac{a^2+b^2}{ab(b-a)};$$

$$\frac{9^{\frac{x}{4}}\cdot 2^{-\frac{x}{4}}}{9^{\frac{x}{2}}+2\cdot 9^{\frac{x}{4}}\cdot 2^{\frac{x}{4}}+2^{\frac{x}{2}}}=\frac{\frac{a}{b}}{(a+b)^2}=\frac{a}{b(a+b)^2}.$$

Получаем, что

$$f(x)=\frac{9^x-2^x}{9^{\frac{3x}{4}}-9^{\frac{x}{2}}\cdot 2^{\frac{x}{4}}}:\frac{9^{\frac{x}{2}}+2^{\frac{x}{2}}}{2^{\frac{x}{2}}\cdot 9^{\frac{x}{4}}-9^{\frac{x}{2}}\cdot 2^{\frac{x}{4}}}\cdot\frac{9^{\frac{x}{4}}\cdot 2^{-\frac{x}{4}}}{9^{\frac{x}{2}}+2\cdot 9^{\frac{x}{4}}\cdot 2^{\frac{x}{4}}+2^{\frac{x}{2}}}=$$

$$=\frac{(a-b)(a+b)\left(a^2+b^2\right)}{a^2(a-b)}:\frac{a^2+b^2}{ab(b-a)}\cdot\frac{a}{b(a+b)^2}=\frac{b-a}{b+a}.$$

Возвращаясь к первоначальным обозначениям, получаем, что $f(x)=\dfrac{2^{\frac{x}{4}}-9^{\frac{x}{4}}}{2^{\frac{x}{4}}+9^{\frac{x}{4}}}$. Далее, $f(4)=\dfrac{2-9}{2+9}=-\dfrac{7}{11}$.

Ответ: $-\dfrac{7}{11}$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задания с выбором ответа

1. Вычислите значение выражения $6\cdot\left(\dfrac{216}{125}\right)^{-\frac{1}{3}}$.

1) $\dfrac{1}{5}$ 3) 6

2) $\dfrac{1}{6}$ 4) 5

2. Представьте выражение $\left(\left(\dfrac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{6}}}\right)^{-6}\right)^{\frac{1}{3}}$ в виде степени положительного числа a.

1) $a^{\frac{1}{2}}$ 3) $a^{\frac{1}{3}}$

2) $a^{-\frac{1}{2}}$ 4) $a^{-\frac{1}{3}}$

3. Упростите выражение $\sqrt{x\sqrt[4]{x\sqrt[7]{x}}}$ и вычислите его значение при $x=5^{-\frac{14}{9}}$.

1) $5^{-\frac{1}{7}}$ 3) $\dfrac{1}{5}$

2) $5^{-\frac{1}{4}}$ 4) 5

4. Дана функция $f(x)=(0,2)^x$. Найдите значение выражения $f(0)+2f(-1)$.

1) 0,5 3) 4

2) 5 4) 11

5. Расположите числа $7^{-\sqrt{2}}$, $7^{\sqrt{2}}$, $7^{-\sqrt{3}}$, $7^{\sqrt{3}}$ в порядке убывания.

1) $7^{-\sqrt{2}} > 7^{-\sqrt{3}} > 7^{\sqrt{2}} > 7^{\sqrt{3}}$

2) $7^{\sqrt{3}} > 7^{\sqrt{2}} > 7^{-\sqrt{2}} > 7^{-\sqrt{3}}$

3) $7^{\sqrt{2}} < 7^{\sqrt{3}} < 7^{-\sqrt{3}} < 7^{-\sqrt{2}}$

4) $7^{\sqrt{3}} > 7^{-\sqrt{3}} > 7^{\sqrt{2}} > 7^{-\sqrt{2}}$

6. Расположите числа $17^{-1,3}$, $17^{1,3}$, $17^{-1,4}$, $17^{1,4}$ в порядке возрастания.

1) $17^{-1,3} < 17^{-1,4} < 17^{1,3} < 17^{1,4}$;

2) $17^{-1,4} < 17^{-1,3} < 17^{1,4} < 17^{1,3}$;

3) $17^{-1,4} < 17^{-1,3} < 17^{1,3} < 17^{1,4}$;

4) $17^{-1,4} < 17^{1,4} < 17^{-1,3} < 17^{1,3}$.

7. Расположите числа $0,7^{-0,3}$, $0,7^{0,3}$, $0,7^{-0,4}$, $0,7^{0.4}$ в порядке возрастания.

1) $0,7^{0,4} < 0,7^{0,3} < 0,7^{-0,3} < 0,7^{-0,4}$;

2) $0,7^{-0,4} < 0,7^{-0,3} < 0,7^{0,3} < 0,7^{0,4}$;

3) $0,7^{0,4} < 0,7^{0,3} < 0,7^{-0,4} < 0,7^{-0,3}$;

4) $0,7^{0,3} < 0,7^{0,4} < 0,7^{-0,3} < 0,7^{-0,4}$.

Задания с кратким ответом

8. Дана функция $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$. Найдите сумму

$$f(0)+f(1)+f(2)+\ldots+f(n)+\ldots$$

9. Найдите значение выражения $\left(\frac{3^{3^2}\left(3^3\right)^2}{\left(3^{3^2}\right)^2}\right)^{-x}$ при $x=2$.

10. Даны функции $s(x)=\frac{5^x-5^{-x}}{2}$ и $c(x)=\frac{2^x+2^{-x}}{2}$. Найдите значение выражения $s(2)c(2)+s(-2)c(-2)$.

11. Найдите значение выражения $\left(3-3^{2x}\right)^2\cdot 3^{-x}-\left(3-3^{-2x}\right)^2\cdot 3^x$, если $3^x-3^{-x}=4$.

12. Упростите выражение

$$\frac{1}{\left(5^x-2^x\right)\left(5^x-3^x\right)}+\frac{1}{\left(2^x-3^x\right)\left(2^x-5^x\right)}+\frac{1}{\left(3^x-2^x\right)\left(3^x-5^x\right)}$$

и найдите его значение при $x=\pi$.

13. Упростите выражение

$$\frac{2^x+3^x}{\left(5^x-2^x\right)\left(5^x-3^x\right)}+\frac{3^x+5^x}{\left(2^x-3^x\right)\left(2^x-5^x\right)}+\frac{5^x+2^x}{\left(3^x-2^x\right)\left(3^x-5^x\right)}$$

и найдите его значение при $x=12$.

14. Упростите выражение

$$\frac{5^{3x}}{\left(5^x-2^x\right)\left(5^x-3^x\right)}+\frac{2^{3x}}{\left(2^x-3^x\right)\left(2^x-5^x\right)}+\frac{3^{3x}}{\left(3^x-2^x\right)\left(3^x-5^x\right)}$$

и найдите его значение при $x=-1$.

15. Упростите выражение

$$\left(\frac{5^{2x}-3^{2x}}{2^x}+\frac{3^{2x}-2^{2x}}{5^x}+\frac{2^{2x}-5^{2x}}{3^x}\right):\left(\frac{5^x-3^x}{2^x}+\frac{3^x-2^x}{5^x}+\frac{2^x-5^x}{3^x}\right)$$

и найдите его значение при $x=\frac{1}{2}$.

§ 2. Показательные уравнения и неравенства

2.1. ПРОСТЕЙШИЕ ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Пример 1. Решите уравнение $5^{x+1}=\left(\frac{1}{5}\right)^{x-2}$.

Решение.

$$5^{x+1}=\left(\frac{1}{5}\right)^{x-2}\Leftrightarrow 5^{x+1}=5^{2-x}\Leftrightarrow x+1=2-x\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}.$$

Ответ. $\frac{1}{2}$.

Пример 2. Решите уравнение $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{6-x^2}{2}}=8$.

Решение.

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{6-x^2}{2}}=8 \Leftrightarrow 2^{x^2-6}=2^3 \Leftrightarrow x^2-6=3 \Leftrightarrow x^2=9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-3 \end{array}\right..$$

Ответ: 3; –3.

2.2. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Назовем показательным линейным уравнением уравнение вида $c_1a^{f(x)+k_1}+c_2a^{f(x)+k_2}+\ldots+c_na^{f(x)+k_n}=C$.

Вынося за скобки общий множитель $a^{f(x)}$, получаем уравнение $a^{f(x)}\left(c_1a^{k_1}+c_2a^{k_2}+\ldots+c_na^{k_n}\right)=C$, которое является простейшим показательным уравнением.

Пример 3. Решите уравнение $2^{x+5}+8\cdot 2^{x-1}-2^2=0$.

Решение.

$$2^{x+5}+8\cdot 2^{x-1}-2^2=0 \Leftrightarrow 2^{x+5}+2^{x+2}-4=0 \Leftrightarrow 2^{x+2}(8+1)=4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{x+2}=\frac{4}{9} \Leftrightarrow x+2=\log_2\frac{4}{9} \Leftrightarrow x=-2+2\log_2\frac{2}{3} \Leftrightarrow x=-2\log_2 3.$$

Ответ: $-2\log_2 3$.

Пример 4. Решите уравнение

$$7^{x+2}-\left(\frac{1}{7}\right)7^{x+1}-14\cdot 7^{x-1}+2\cdot 7^x=48.$$

Решение.

$$7^{x+2}-\left(\frac{1}{7}\right)7^{x+1}-14\cdot 7^{x-1}+2\cdot 7^x=48 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7^{x-1}(343-7-14+14)=48 \Leftrightarrow 7^{x-1}=\frac{48}{336} \Leftrightarrow.$$

$$\Leftrightarrow 7^{x-1}=\frac{1}{7} \Leftrightarrow x-1=-1 \Leftrightarrow x=0$$

Ответ: 0.

2.3. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнения данного вида могут быть в свою очередь разделены на два типа.

А) Уравнения вида $c_1a^{2f(x)}+c_2a^{f(x)}+c_3=0$.

Решение уравнений данного типа сводится к решению вспомогательного квадратного уравнения вида $c_1y^2+c_2y+c_3=0$. Если это уравнение решений не имеет, то, конечно, не имеет решений и исходное уравнение. В случае, когда вспомогательное уравнение имеет решения (что ни в коем случае еще не гарантирует наличия решений исходного уравнения), можно записать:

$$c_1a^{2f(x)}+c_2a^{f(x)}+c_3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a^{f(x)}=y_1 \\ a^{f(x)}=y_2 \end{array}\right.,$$

где y_1, y_2 — корни вспомогательного уравнения.

Пример 5. Решите уравнение: $4^x-3\cdot 2^{x+2}=64$.

Решение.

$$4^x-3\cdot 2^{x+2}=64 \Leftrightarrow 2^{2x}-12\cdot 2^x-64=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x=16 \\ 2^x=-4 \end{array}\right. \Leftrightarrow 2^x=16 \Leftrightarrow x=4.$$

Ответ: 4.

Пример 6. Решите уравнение: $25^x+24\cdot 5^{x-1}=1$.

Решение.

$$25^x+24\cdot 5^{x-1}=1 \Leftrightarrow 5^{2x}+\frac{24}{5}5^x-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5^{\sqrt{x}}=25 \\ 5^{\sqrt{x}}=-5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \sqrt{x}=2 \Leftrightarrow x=4.$$

Ответ: 4.

Б) Уравнения вида $c_1a^{f(x)}+c_2a^{-f(x)}+c_3=0$.

Решение уравнений данного типа сводится к решению уравнений предыдущего типа. Так как показательная функция принимает только положительные значения, то

$$c_1a^{f(x)}+c_2a^{-f(x)}+c_3=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c_1a^{2f(x)}+c_3a^{f(x)}+c_2=0$$

Пример 7. Решите уравнение: $5^{\sqrt{x}}-5^{3-\sqrt{x}}=20$

Решение.

$$5^{\sqrt{x}}-5^{3-\sqrt{x}}=20 \Leftrightarrow 5^{2\sqrt{x}}-20\cdot 5^{\sqrt{x}}-125=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5^{\sqrt{x}}=25 \\ 5^{\sqrt{x}}=-5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \sqrt{x}=2 \Leftrightarrow x=4.$$

Ответ: 4.

Пример 8. Решите уравнение: $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=4$.

Решение.

Так как $\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{4-3}=1$, то данное уравнение можно записать в виде $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^{-x}=4$.

Поэтому

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^{2x}-4\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x+1=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=2+\sqrt{3} \\ \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=2-\sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-2. \end{array}\right.$$

Ответ: –2; 2.

2.4. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнения вида $c_1a^{f(x)}=c_2b^{f(x)}$ будем называть показательным однородным линейным уравнением.

$$c_1a^{f(x)}=c_2b^{f(x)} \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)}=\frac{c_2}{c_1}.$$

Пример 9. Решите уравнение $3^{3x}+9\cdot 2^{2x}=4^x+3^{2+3x}$.

Решение.

$$3^{3x}+9\cdot 2^{2x}=4^x+3^{2+3x} \Leftrightarrow 4^x(9-1)=27^x(9-1) \Leftrightarrow \left(\frac{2}{27}\right)^x=1 \Leftrightarrow x=0.$$

Ответ: 0.

Пример 10. Решите уравнение $2^{x^2-1}-2^2\ 3^{x^2-1}=3^{x^2-1}-2^{x^2+1}$.

Решение.

$$2^{x^2-1}-2^2\ 3^{x^2-1}=3^{x^2-1}-2^{x^2+1}\Leftrightarrow 2^{x^2-1}(1+4)=3^{x^2-1}(4+1)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-1}=1\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right..$$

Ответ: –1; 1.

2.5. ОДНОРОДНЫЕ ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Уравнения вида $c_1a^{2f(x)}+c_2(ab)^{f(x)}+c_3b^{2f(x)}=0$ называются однородными показательными уравнениями второго порядка. Решение данного типа уравнений сводится к решению показательных квадратных уравнений.

$$c_1a^{2f(x)}+c_2(ab)^{f(x)}+c_3b^{2f(x)}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c_1\left(\frac{a}{b}\right)^{2f(x)}+c_2\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)}+c_3=0.$$

Пример 11. Решите уравнение $3\cdot4^x-7\ 10^x+2\cdot25^x=0$.

Решение.

$$3\ 4^x-7\cdot10^x+2\cdot25^x=0\Leftrightarrow 3\left(\frac{2}{5}\right)^{2x}-7\left(\frac{2}{5}\right)^{x}+2=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left(\frac{2}{5}\right)^x=2\\ \left(\frac{2}{5}\right)^x=\frac{1}{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\log_{\frac{2}{5}}2\\ x=-\log_{\frac{2}{5}}3.\end{array}\right.$$

Ответ: $\log_{\frac{2}{5}}2;-\log_{\frac{2}{5}}3$.

Пример 12. Решите уравнение

$$3^{2x^2+6x-9}+4\cdot15^{x^2+3x-5}=3\cdot5^{2x^2+6x-9}.$$

Решение.

$$3^{2x^2+6x-9}+4\cdot15^{x^2+3x-5}=3\cdot5^{2x^2+6x-9}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\cdot3^{2(x^2+3x-5)}+4\cdot15^{x^2+3x-5}-15\cdot5^{2(x^2+3x-5)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\left(\frac{3}{5}\right)^{2(x^2+3x-5)}+4\left(\frac{3}{5}\right)^{x^2+3x-5}-15=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left(\frac{3}{5}\right)^{x^2+3x-5}=\frac{5}{3}\\ \left(\frac{3}{5}\right)^{x^2+3x-5}=-3\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^{x^2+3x-5}=\frac{5}{3} \Leftrightarrow x^{2+3x-5}=-1 \Leftrightarrow x^2+3x-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-4\\ x=1\end{array}\right..$$

Ответ: –4; 1.

2.6. УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМ ОСНОВАНИЕМ

Если основание степени в уравнении есть переменная величина $a(x)$, то решения уравнения будем искать при условии, что $a(x)>0$. При этом отнюдь не исключается случай, когда $a(x)=1$. Решение уравнений с переменным основанием сводится к решению системы:

$$a(x)^{f(x)}=a(x)^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases}a(x)>0,\\ (a(x)-1)(f(x)-g(x))=0.\end{cases}$$

Пример 13. Решите уравнение $(x^2+x+1)^{x-3}=1$.

Р е ш е н и е . Воспользуемся указанным соотношением.

$$(x^2+x+1)^{x-3}=1 \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+x+1>0,\\ (x^2+x+1-1)(x-3)=0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=0\\ x=3\end{array}\right..$$

Ответ: –1; 0; 3.

Пример 14. Решите уравнение $x^{x^2-5x+8}=x^2$, $x>0$.

Р е ш е н и е . $x^{x^2-5x+8}=x^2 \Leftrightarrow \begin{cases}x>0,\\ (x-1)(x^2-5x+8-2)=0\end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x>0,\\ \left[\begin{array}{l}x=1\\ x^2-5x+6=0\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=2\\ x=3.\end{array}\right.$$

Ответ: 1; 2; 3.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задания с выбором ответа

16. Найдите сумму корней уравнения $\left(\frac{5}{3}\right)^{x+1} \left(\frac{9}{25}\right)^{x^2+2x-11} = \left(\frac{5}{3}\right)^9$.

1) 2
2) 1,5
3) 1
4) 0,5

17. Найдите сумму квадратов корней уравнения

$$4^{x^2+2} - 9 \cdot 2^{x^2+2} + 8 = 0.$$

1) 1
2) 2
3) 5
4) 10

18. Найдите модуль разности корней уравнения

$$4^{x-\sqrt{x^2-5}} - 12 \cdot 2^{x-1-\sqrt{x^2-5}} + 8 = 0.$$

1) 0
2) 0,25
3) 0,5
4) 0,75

19. Найдите произведение корней уравнения $2^{2x-3} = 4^{x^2-3x-1}$.

1) 0
2) 1/4
3) 1/2
4) 1/3

20. Найдите промежуток, которому принадлежат все решения уравнения $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x$.

1) $[-1; 0)$
2) $[0; 1)$
3) $[1; 2)$
4) $[2; 3)$

Задания с кратким ответом

21. Решите уравнение $5^x \sqrt[x]{8^{x-1}} = 500$.

22. Найдите сумму квадратов уравнения

$$\left(\sqrt{5+\sqrt{24}}\right)^x + \left(\sqrt{5-\sqrt{24}}\right)^x = 10.$$

23. Найдите целую часть корня уравнения $\dfrac{7 \cdot 4^{x-2}}{4^x - 3 \cdot 5^x} = 1 + 3 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^x$.

24. Решите уравнение $4^{x+\sqrt{x^2-3}} - 5 \cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-3}} = 6$.

25. Решите уравнение $4^{\frac{x^2+1}{x}} - 7 \cdot 2^{\frac{x^2+1}{x}} + 12 = 0$.

26. Решите уравнение $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=2^x$.

27. Найдите наибольшее целое число a, при котором уравнение $25^x-(a-1)5^x+2a+3=0$ имеет единственное решение.

28. Найдите все значения параметра, при которых система уравнений $\begin{cases}2^{\frac{2x}{x^2+1}}+7^{1-y^2}=9,\\3^x-2^{|y|+1}=a\end{cases}$ имеет решение.

29. Решите уравнение $\left(1-x^4\right)^{(x+1)^2}=\left(1-x^4\right)^{(x+3)(3x-2)}$, $-1<x<1$

30. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases}3\cdot 2^{|x|}+5|x|+4=3y+5x^5+3a,\\x^2+y^2=1\end{cases}$ имеет единственное решение.

2.7. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Простейшими показательными неравенствами с постоянным основанием $a>0$, $a\neq 1$ назовем неравенства вида

$$a^{f(x)}>(\geq,<,\leq)\ c,\quad c=\text{const}.$$

$$\text{а)}\ a^{f(x)}<c\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}c\leq 0,\\\varnothing\end{cases}\\\begin{cases}c>0,\\(a-1)\left(f(x)-\log_a c\right)<0,\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\text{б)}\ a^{f(x)}\leq c\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}c\leq 0,\\\varnothing\end{cases}\\\begin{cases}c>0,\\a\neq 1,\\(a-1)\left(f(x)-\log_a c\right)\leq 0,\end{cases}\\\begin{cases}c>0,\\a=1,\\(a-1)\left(f(x)-\log_a c\right)\leq 0,\end{cases}\end{array}\right.$$

в) $a^{f(x)} > c \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} c \le 0, \\ -\infty < x < \infty \end{cases} \\ \begin{cases} c > 0, \\ (a-1)(f(x) - \log_a c) > 0, \end{cases}\end{array}\right.$

г) $a^{f(x)} \ge c \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} c \le 0, \\ -\infty < x < \infty \end{cases} \\ \begin{cases} c > 0, \\ (a-1)(f(x) - \log_a c) \ge 0. \end{cases}\end{array}\right.$

Пример 1. Решите неравенство $8^{5-\frac{x}{3}} > 4$.

Р е ш е н и е.

$$8^{5-\frac{x}{3}} > 4 \Leftrightarrow 2^{3\left(5-\frac{x}{3}\right)} > 2^2 \Leftrightarrow (2-1)(15 - x - 2) > 0 \Leftrightarrow x < 13.$$

Ответ: $(-\infty; 13)$.

Пример 2. Решите неравенство $\left(\frac{3}{4}\right)^{6x+10-x^2} < \frac{27}{64}$.

Р е ш е н и е.

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{6x+10-x^2} < \frac{27}{64} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^{-x^2+6x+10} < \left(\frac{3}{4}\right)^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{4} - 1\right)\left(-x^2 + 6x + 10 - 3\right) < 0 \Leftrightarrow \left(x^2 - 6x - 7\right) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 7.$$

Ответ: $(-1; 7)$.

Пример 3. Решите неравенство $x^2 \cdot 6^x - 6^{2+x} \le 0$.

Р е ш е н и е.

$x^2 \cdot 6^x - 6^{2+x} \le 0 \Leftrightarrow 6^x\left(x^2 - 36\right) \le 0$. Так как для всех x $6^x > 0$, то $6^x\left(x^2 - 36\right) \le 0 \Leftrightarrow x^2 - 36 \le 0 \Leftrightarrow -6 \le x \le 6$.

Ответ: $[-6; 6]$.

Заметим, что множитель вида $\left(a^{f(x)} - a^{g(x)}\right)$ и множитель вида $(a-1)\left(f(x) - g(x)\right)$ при всех допустимых значениях переменных имеют один и тот же знак. Это дает возможность быстро рационализировать показательные неравенства.

Пример 4. Решите неравенство $5^{2x+1} > 5^x + 4$.

Решение.

Применяя формулу разложения квадратного трехчлена, получаем

$$5^{2x+1} > 5^x + 4 \Leftrightarrow 5\cdot 5^{2x} - 5^x - 4 > 0 \Leftrightarrow \left(5^x - 1\right)\left(5\cdot 5^x + 4\right) > 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (5-1)x > 0 \Leftrightarrow x > 0.$$

Ответ: $(0;+\infty)$

Пример 5. Решите неравенство $\dfrac{2^{x+1}-18}{2^x-2} \geq 1$.

Решение.

$$\frac{2^{x+1}-18}{2^x-2} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{2\cdot 2^x - 18 - 2^x + 2}{2^x-2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2^x-16}{2^x-2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x-4}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 4 \\ x < 1 \end{array}\right..$$

Ответ: $(-\infty;1)\cup[4;+\infty)$.

Пример 6. Решите неравенство $\left(x^2 - x + 2\right)^{x^2-2,5x+1} < 1$.

Решение.

$$\left(x^2 - x + 2\right)^{x^2-2,5x+1} < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x + 2 > 0, \\ \left(x^2 - x + 2 - 1\right)\left(x^2 - \dfrac{5}{2}x + 1\right) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 < 0 \Leftrightarrow (2x-1)(x-2) < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x < 2.$$

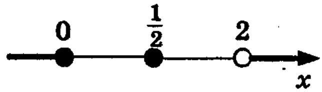
Ответ: $\left(\dfrac{1}{2};2\right)$.

Пример 7. Решите неравенство $\dfrac{\left(2^{2x}-2\right)^2\left(1-3^x\right)}{5^x-25} \leq 0$.

Решение.

Рационализируя неравенство, получаем

$$\frac{\left(2^{2x}-2\right)^2\left(1-3^x\right)}{5^x-25} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(2x-1)^2(0-x)}{x-2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x(2x-1)^2}{x-2} \geq 0.$$



Получаем, что $\dfrac{x(2x-1)^2}{x-2} \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq 0 \\ x = \dfrac{1}{2} \\ x > 2. \end{array}\right.$

Ответ: $(-\infty\,;\,0] \cup \left\{\dfrac{1}{2}\right\} \cup (2\,;\,+\infty)$.

Пример 8. Решите неравенство $3^{2\sqrt{x}} - 4 \cdot 3^{\sqrt{x}} + 3 \geq 0$.

Решение.

$$3^{2\sqrt{x}} - 4 \cdot 3^{\sqrt{x}} + 3 \geq 0 \Leftrightarrow \left(3^{\sqrt{x}} - 3\right)\left(3^{\sqrt{x}} - 1\right) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^{\sqrt{x}} \geq 3 \\ 3^{\sqrt{x}} \leq 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x} \geq 1 \\ \sqrt{x} \leq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 1 \\ x = 0. \end{array}\right.$$

Ответ: $\{0\} \cup [1\,;\,+\infty)$.

Пример 9. Решите неравенство $x^4 + 3^{x+4} \geq x^4 \cdot 3^x + 81$.

Решение.

$$x^4 + 3^{x+4} \geq x^4 \cdot 3^x + 81 \Leftrightarrow x^4 - 81 - 3^x\left(x^4 - 81\right) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x^4 - 81\right)\left(1 - 3^x\right) \geq 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+3)\left(x^2+9\right)(3-1)(0-x) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(x-3)(x+3) \leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq -3 \\ 0 \leq x \leq 3. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty\,;\,-3] \cup [0\,;\,3]$.

Пример 10. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система $\begin{cases} 2^{3x^2+2y^2+8x-4y+8} + 2^{x^2+4y+5} \leq 33 \cdot 2^{2x^2+y^2+4x+4}, \\ x^2 + y^2 - 8x + 8y = a, \end{cases}$ имеет решение, но среди этих решений нет ни одного, удовлетворяющего условию $x + y = 0$.

Решение.

Разделив обе части первого неравенства на 2^{x^2+4y}, получим: $2^{2x^2+2y^2+8x-8y+8} - 33 \cdot 2^{x^2+y^2+4x-4y+4} + 32 \leq 0$.

Рассматривая левую часть неравенства как квадратный трехчлен относительно $2^{x^2+y^2+4x-4y+4}$, разложим данное выражение на множители.

$$2^{2x^2+2y^2+8x-8y+8}-33\cdot 2^{x^2+y^2+4x-4y+4}+32\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(2^{x^2+y^2+4x-4y+4}-32\right)\left(2^{x^2+y^2+4x-4y+4}-1\right)\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1\le 2^{x^2+y^2+4x-4y+4}\le 32\Leftrightarrow 0\le x^2+y^2+4x-4y+4\le 5\Leftrightarrow$$

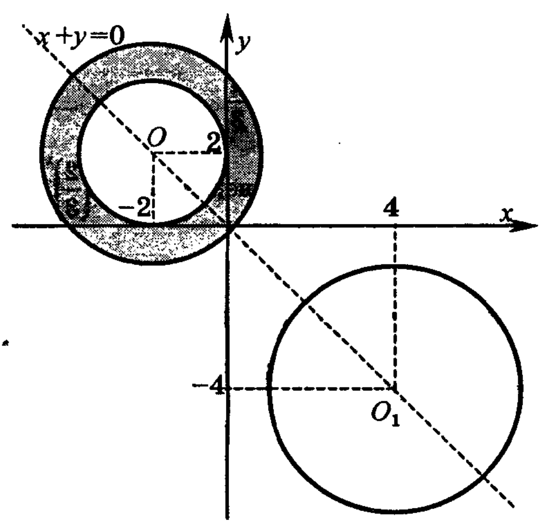
$$\Leftrightarrow 4\le (x+2)^2+(y-2)^2\le 9.$$

Таким образом, первое неравенство системы задает на координатной плоскости кольцо, ограниченное двумя концентрическими окружностями с центром в точке (–2; 2) и радиусами, равными соответственно 2 и 3.

Рассмотрим второе уравнение данной системы:

$$x^2+y^2-8x+8y=a\Leftrightarrow (x-4)^2+(y+4)^2=a+32\ .$$

Следовательно, уравнение системы задает на координатной плоскости окружность с центром в точке $(4;-4)$ и радиусом, зависящим от параметра и равным $\sqrt{a+32}$, $a\ge -32$.



Искомая система будет иметь хотя бы одно решение, если окружность, имеющая меняющийся радиус, будет иметь с кольцом хотя бы одну общую точку. Однако среди решений не будет удовлетворяющих условию $x+y=0$, если первая окружность будет иметь две точки пересечения с внутренней окружностью кольца.

Заметим, что в этом случае должно выполняться условие $OO_1 - 2 < \sqrt{a+32} < OO_1 + 2$. $OO_1 = 6\sqrt{2}$.

Получаем: $6\sqrt{2} - 2 < \sqrt{a+32} < 6\sqrt{2} + 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 76 - 24\sqrt{2} < a + 32 < 76 + 24\sqrt{2} \Leftrightarrow 44 - 24\sqrt{2} < a < 44 + 24\sqrt{2}$.

Ответ: $\left(44 - 24\sqrt{2}; 44 + 24\sqrt{2}\right)$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задания с выбором ответа

31. Найдите наибольшее целое решение неравенства

$$2 \cdot 25^x + 5 \cdot 4^x < 31{,}57 \cdot 10^x.$$

1) −2 2) −1
3) 0 4) 2

32. Найдите длину отрезка числовой оси, являющегося решением неравенства $2^{2x+1} + 7^{2x+1} \le 9 \cdot 14^x$.

1) $\frac{1}{3}$ 3) 1
2) $\frac{2}{3}$ 4) $\frac{4}{3}$

33. Найдите число целых решений неравенства $\left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{3}{2}\right)^x \le \frac{35}{12}$.

1) 0 2) 1
3) 2 4) 4

34. Найдите наименьшее целое значение переменной x, являющееся решением неравенства $\dfrac{3^{\frac{1}{x}} + 12}{3^{\frac{1}{x}} - 1} \ge \dfrac{4}{3} \cdot 3^{\frac{1}{x}}$.

1) 0 2) 1
3) −2 4) 3

35. Найдите сумму целых чисел, являющихся решением неравенства $3^{72} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x \cdot 3^{-\sqrt{x}} > 1$.

1) 512 2) 1024
3) 2016 4) 4096

Задания с кратким ответом

36. Найдите сумму натуральных решений неравенства

$$(0,3)^{2+4+6+...+2x}>(0,3)^{72}.$$

37. Найдите количество целых чисел, удовлетворяющих неравенству $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{|x+2|}{2-|x|}}>9$.

38. Найдите наименьшее целое решение неравенства

$$\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^x+\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x\le\left(2\sqrt{2}\right)^x.$$

39. Решите неравенство $2^{|x-1|+|x-3|}+x^2-4x\le0$.

40. Найдите среднее арифметическое целых чисел, удовлетворяющих неравенству

$$98-7^{x^2+5x-48}\ge49^{x^2+5x-49}.$$

Задания с развернутым ответом

41. Решите неравенство $\left(\frac{4x^2}{x^4+1}\right)^{3x^2-x}>\left(\frac{x^4+1}{4x^2}\right)^{x-2}$.

42. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}7^{2x^2+2y^2+13x+10y+13}+7^{x+2y-8}\le344\cdot7^{x^2+y^2+7x+6y+1},\\ x^2+y^2-18x-12y=a\end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, но среди этих решений нет ни одного, удовлетворяющего условию $2x-3y=0$.

43. Решите неравенство:

$$\frac{(x-4)-(x-2)\left(2^{x^2-5x+4}-1\right)}{2-x}\ge\left|2^{x^2-5x+4}-1\right|+\left|\frac{x-4}{x-2}\right|.$$

44. Найдите все положительные значения параметра a, при каждом из которых среди решений неравенства $a^2-9^{x+1}-8a\cdot3^x>0$ содержится только одно натуральное число.

45. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых среди решений неравенства

$$12 \cdot 11^{\sqrt{3-x}} + a \cdot 11^{x-2} > 11^{x+\sqrt{3-x}-2} + 12a$$

содержится максимальное количество натуральных чисел. Укажите их количество.

§ 3. *Исследование свойств показательной функции*

Пример 1. Найдите область определения функции

$$y = 3^{\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}}.$$

1) $(0;3)$ 3) $(-3;3)$

2) $[-3;0)$ 4) $[-3;3]$

Решение. Так как показательная функция определена при всех допустимых значениях ее аргумента, то область определения задается неравенством:

$$9-x^2>0.\ 9-x^2>0 \Leftrightarrow x^2<9 \Leftrightarrow -3<x<3.$$

Поэтому номер правильного ответа — 3).

Ответ: 3.

Пример 2. Найдите область значений функции

$$y = \left(\frac{1}{3}\right)^{3\sin x}.$$

1) $\left[\frac{1}{27};27\right]$

2) $(0;+\infty)$

3) $(-3;3)$

4) $\left[\frac{1}{3};3\right]$

Решение.

Так как $-3 \le 3\sin x \le 3$, то $\frac{1}{27} \le \left(\frac{1}{3}\right)^{3\sin x} \le 27$.

Поэтому номер правильного ответа — 1).

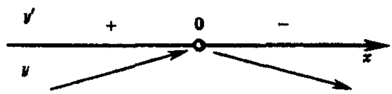
Ответ: 1.

Пример 3. Найдите точку экстремума функции

$$y(x)=3\cdot e^{2x}-2\cdot e^{3x}.$$

Р е ш е н и е. Так как функция дифференцируема при любом значении аргумента, то найдем производную:

$$y'=6\cdot e^{2x}-6\cdot e^{3x}=6\cdot e^{2x}\left(1-e^{x}\right);\ y'(0)=0.$$



Так как в точке $x=0$ производная функции обращается в 0 и меняет свой знак при переходе через эту точку, то $x=0$ — точка экстремума.

Ответ: 0.

Пример 4. Найдите значение производной функции $y=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$ в точке $x=\ln 2$.

Р е ш е н и е. Найдем производную этой функции.

$$y'=\left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right)'=\frac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}\right).$$

$$y'(\ln 2)=\frac{1}{2}\left(e^{\ln 2}+e^{-\ln 2}\right)=\frac{1}{2}\left(2+\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{4}.$$

Ответ: $\dfrac{5}{4}$.

Пример 5. Найдите координаты точки графика функции $f(x)=e^{x}$, в которой касательная к графику параллельна прямой $2y-x+2=0$.

Р е ш е н и е. Запишем уравнение прямой в виде $y=\dfrac{1}{2}x-1$. Так как касательная к графику параллельна данной прямой, то угловой коэффициент касательной равен $\dfrac{1}{2}$.

Найдем абсциссу точки касания, решив уравнение $f'(x_0)=\dfrac{1}{2}$.

$$f'(x)=e^{x},\quad f'(x_0)=e^{x_0}=\frac{1}{2}.\ x_0=\ln\frac{1}{2}=-\ln 2.$$

Найдем ординату точки касания $f(x_0)=e^{x_0}=e^{-\ln 2}=\dfrac{1}{2}$.

Получаем, что точка касания имеет координаты $\left(-\ln 2;\dfrac{1}{2}\right)$.

Ответ: $\left(-\ln 2;\dfrac{1}{2}\right)$.

Пример 6. Решите уравнение $2^x+3^x=5^x$.

Р е ш е н и е . Запишем данное уравнение следующим образом

$$2^x+3^x=5^x \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^x+\left(\frac{3}{5}\right)^x=1.$$

Левая часть уравнения представляет собой сумму двух монотонно убывающих функций, т.е. монотонно убывающую функцию. Следовательно, каждое свое значение эта функция принимает при единственном значении аргумента.

Очевидно, что $x=1$ — решение данного уравнения. В силу монотонности — единственное решение.

Пример 7. Решите уравнение $2^{1-|x|}=x^2+1+\dfrac{1}{x^2+1}$.

Р е ш е н и е . Очевидно, что выполняется неравенство $1-|x|\le 1 \Leftrightarrow 2^{1-|x|}\le 2$ для любого действительного значения переменной. Равенство достигается если $x=0$.

С другой стороны, применяя неравенство Евклида, получаем, что $x^2+1+\dfrac{1}{x^2+1}\ge 2\cdot\sqrt{(x^2+1)\dfrac{1}{x^2+1}}$.

Таким образом $x^2+1+\dfrac{1}{x^2+1}\ge 2$ при всех значениях переменной x, причем равенство достигается, если $x=0$.

Таким образом, $x=0$ — единственное решение данного уравнения.

Ответ: 0.

Пример 8. Решите уравнение.

$$\sqrt{17-12\sqrt{2}}\cdot 3^x+\sqrt{9-4\sqrt{2}}\cdot 2^x=2^{2x+1}.$$

Р е ш е н и е . Заметим, что

$$\sqrt{17-12\sqrt{2}}=\sqrt{\left(3-2\sqrt{2}\right)^2}=3-2\sqrt{2},\ \sqrt{9-4\sqrt{2}}=\sqrt{\left(2\sqrt{2}-1\right)^2}=2\sqrt{2}-1.$$

Представив также $2^{2x+1}=2\cdot 4^x$, запишем уравнение в виде

$$\left(3-2\sqrt{2}\right)\cdot 3^x+\left(2\sqrt{2}-1\right)\cdot 2^x=2\cdot 4^x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(3-2\sqrt{2}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^x+\left(2\sqrt{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}\right)^x=2 \Leftrightarrow x=0.$$

Левая часть уравнения есть монотонно убывающая функция. Поэтому, как следует из уравнения, $x=0$ — единственное решение уравнения.

Ответ: 0.

Пример 9. Найдите все значения параметра $a>1$, для каждого из которых график функции $f(x)=a^x$ касается прямой $y=x$.

Решение. Пусть $x=x_0$ — абсцисса точки касания. Тогда уравнение касательной к графику функции $f(x)=a^x$ будет иметь вид: $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.

Искомые значения параметра задаются системой уравнений:

$$\begin{cases} f'(x_0)=1, \\ f(x_0)-x_0f'(x_0)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x_0)=1, \\ f(x_0)=x_0. \end{cases}$$

Подставляя, получаем

$$\begin{cases} a^{x_0}\ln a=1, \\ a^{x_0}=x_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^{x_0}=\dfrac{1}{\ln a}, \\ x_0=\dfrac{1}{\ln a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=\dfrac{1}{\ln a}, \\ \dfrac{1}{\ln a}\cdot\ln a=-\ln(\ln a). \end{cases}$$

Решая второе уравнение, получаем, что

$$\ln(\ln a)=-1 \Leftrightarrow \ln a=\frac{1}{e} \Leftrightarrow a=e^{\frac{1}{e}}.$$

Ответ: $a=e^{\frac{1}{e}}$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задания с выбором ответа

46. Найдите среди функций, заданных уравнениями, возрастающую.

1) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 2) $y=\left(\frac{3}{4}\right)^x$

3) $y=\left(\frac{5}{2\sqrt{6}}\right)^x$ 4) $y=\left(\frac{\pi}{3,15}\right)^x$

47. Найдите максимальное значение функции $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{\cos x}$.

1) 1 2) 1/3
3) 1/9 4) 3

48. Найдите область определения функции $y=2,5^{\sqrt{4-x^2}}$.

1) $(0;2)$ 2) $[-2;0)$
3) $(-2;2)$ 4) $[-2;2]$

49. Найдите множество значений функции $y=2^x-3$.

1) $(-\infty;+\infty)$ 2) $(0;+\infty)$
3) $(-3;+\infty)$ 4) $[3;+\infty)$

Задания с кратким ответом

50. Найдите наименьшее значение функции $y=2^{3\cos x-4\sin x}$.

51. Найдите ординату точки графика функции $y=e^x+e^{-x}$, в которой касательная параллельна оси абсцисс.

52. Найдите значение производной функции $y=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ в точке $x=\ln 3$.

53. Решите уравнение: $12^x+5^x=13^x$.

Задания с развернутым ответом

54. Решите неравенство $e^{x-1}\le x$.

55. Решите уравнение $(x-y)^2+(e^x-y)^2=\frac{1}{2}$.

56. Решите уравнение $\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

57. Решите уравнение $\sqrt{a(2^x-2)+1}=1-2^x$.

Глава 4.
Логарифмические выражения, уравнения, неравенства и функции

§ 1. Тождественные преобразования логарифмических выражений

Пример 1. Вычислите: $25^{1+\frac{1}{4}\log_5 49}$.

1) 35
2) 5
3) 175
4) $\log_5 7$

Решение.

Используя свойства степени и свойства логарифмов, запишем

$$25^{1+\frac{1}{4}\log_5 49}=25\cdot 25^{\frac{1}{4}\log_5 49}=25\cdot\left(5^2\right)^{\frac{1}{4}\log_5 49}=25\cdot 5^{\frac{1}{2}\log_5 49}=$$

$$=25\cdot 5^{\log_5 49^{\frac{1}{2}}}=25\cdot 5^{\log_5 7}.$$

Применяя основное логарифмическое тождество, окончательно получим: $25\cdot 5^{\log_5 7}=25\cdot 7=175$.

Номер верного ответа — 3).

Пример 2. Найдите значение выражения $\log_3(9a)$, если

$$\log_3 a^3=12.$$

1) 6
2) 0,5
3) 13
4) 8

Решение.

Найдем значение $\log_3 a$.

Используя свойства логарифмов, преобразуем равенство $\log_3 a^3=12$ к виду $3\log_3 a=12$.

Отсюда $\log_3 a=4$.

Используя свойства логарифмов, выполним преобразования выражения $\log_3(9a)$:

$$\log_3(9a)=\log_3 9+\log_3 a=\log_3 3^2+\log_3 a=2+\log_3 a.$$

Подставляя значение $\log_3 a=4$, получим: $\log_3(9a)=2+4=6$.

Номер верного ответа — 1).

Пример 3. Выразите через a и b $\log_8 9{,}8$, если $\lg 2=a$ и $\lg 7=b$.

1) $\dfrac{a+2b-1}{-3a}$ 3) $\dfrac{a+2b+1}{a}$

2) $a+2b$ 4) $\dfrac{a+2b-1}{3a}$

Решение.

Используя свойства логарифмов, получим:

$$\log_8 9{,}8=\frac{\lg 9{,}8}{\lg 8}=\frac{\lg(49\cdot 0{,}2)}{\lg 2^3}=\frac{\lg 7^2+\lg(2\cdot 10^{-1})}{\lg 2^3}=$$

$$=\frac{2\lg 7+\lg 2+\lg 10^{-1}}{3\lg 2}=\frac{\lg 2+2\lg 7-1}{3\lg 2}=\frac{a+2b-1}{3a}.$$

Номер верного ответа — 4).

Пример 4. Вычислите x, если

$$\log_7 x=4^{0{,}5\log_4 9-0{,}25\log_2 25}+0{,}2\cdot 3^{\log_9 4}$$

Решение.

Используя свойства степеней положительных чисел и свойства логарифмов положительных чисел, преобразуем выражение:

$$4^{0{,}5\log_4 9-0{,}25\log_2 25}+0{,}2\cdot 3^{\log_9 4}=4^{0{,}5\log_4 3^2-0{,}25\log_2 5^2}+0{,}2\cdot 3^{\frac{\log_3 4}{\log_3 9}}=$$

$$=4^{\log_4 3-0{,}5\log_2 5}+0{,}2\cdot 3^{\frac{\log_3 4}{2\log_3 3}}=\frac{3}{4^{0{,}5\log_2 5}}+0{,}2\cdot 3^{0{,}5\log_3 4}=$$

$$=\frac{3}{2^{\log_2 5}}+0{,}2\cdot 3^{\log_3 2}=\frac{3}{5}+0{,}2\cdot 2=1.$$

Таким образом, $\log_7 x=1$, откуда $x=7$.

Ответ: 7.

Пример 5. Вычислите x, если

$$\log_2 x = 6\log_8 7\cdot\log_7 6\cdot\log_6 5\cdot\log_5\cdot 4\log_4\cdot 3\log_3 2$$

Решение.

Используя свойства логарифмов положительных чисел, преобразуем выражение:

$$6\log_8 7\cdot\log_7 6\cdot\log_6 5\cdot\log_5 4\cdot\log_4 3\cdot\log_3 2=$$

$$=6\frac{\log_2 7\cdot\log_2 6\cdot\log_2 5\cdot\log_2 4\cdot\log_2 3\cdot\log_2 2}{\log_2 8\cdot\log_2 7\cdot\log_2 6\cdot\log_2 5\cdot\log_2 4\cdot\log_2 3}=$$

$$=6\cdot\frac{\log_2 2}{\log_2 2^3}=6\cdot\frac{1}{3}=2.$$

Таким образом, $\log_2 x = 2$, откуда $x = 4$.

Ответ: 4.

Пример 6. Выразите x через z, если $x>0$, $y=2^{\frac{1}{1-\log_2 x}}$, $z=2^{\frac{1}{1-\log_2 y}}$.

Решение.

Прологарифмируем данные равенства:

$$\log_2 y=\frac{1}{1-\log_2 x},\quad \log_2 z=\frac{1}{1-\log_2 y}.$$

Выразим отсюда $\log_2 x$ и $\log_2 y$:

$$\log_2 x=1-\frac{1}{\log_2 y},$$

$$\log_2 y=1-\frac{1}{\log_2 z}.$$

Поставляя в первое равенство выражение для $\log_2 y$, получим:

$$\log_2 x=1-\frac{1}{\log_2 y}=1-\frac{1}{1-\frac{1}{\log_2 z}}$$

$$=1-\frac{\log_2 z}{\log_2 z-1}=\frac{1}{1-\log_2 z}.$$

Отсюда $x=2^{\frac{1}{1-\log_2 z}}$.

Ответ: $2^{\frac{1}{1-\log_2 z}}$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задания с выбором ответа

1. Вычислите $\log_3 96 - 5\log_3 2$.

1) -3 2) 0
3) 1 4) 2

2. Вычислите $\log_5 250 + \log_5 \frac{1}{2}$.

1) 3 2) 2
3) 1 4) -1

3. Вычислите $2^{\log_5 25 + \log_2 \frac{1}{2}}$.

1) $0,5$ 2) $\log_5 2$
3) 2 4) 4

4. Вычислите $5^{\log_5 25 + \log_2 \frac{1}{4}}$.

1) 2 2) $\log_5 \frac{1}{2}$
3) 1 4) $2,5$

5. Найдите значение выражения $\log_4(16b)$ при $b > 0$, если $\log_4 b^2 = 9$.

1) $6,5$ 2) 5
3) $8,5$ 4) 7

6. Найдите значение выражения $\log_3(9b)$, если $\log_3(27b) = 27$.

1) 27 2) 4
3) 3 4) 26

7. Найдите значение выражения $\log_4(64b)$, если $\log_4(4b) = 4$.

1) 6 2) 16
3) 19 4) 5

8. Найдите значение выражения $\log_3^2 c$, если $\log_3(3c) = 3$.

1) 1 2) 4
3) 3 4) 9

Задания с кратким ответом

9. Найдите значение выражения $0,25^{\log_{0,5} 5} + 10^{1+\lg 2^{-1}} - 3^{2\log_9 6}$

10. Вычислите x, если $\log_{25} x = 0{,}25^{\lg 2} \cdot 0{,}4^{\lg 2} - 81^{0{,}5\log_9 7} + 5^{\log_{25} 49}$.

11. Вычислите: x, если $\log_3 x = 8 \cdot 0{,}2^{\log_5 2 + \log_5 4} + \log_2 3 \cdot \log_3 2$.

12. Вычислите: x, если $\log_{25} x = 0{,}25^{\lg 2} \cdot 0{,}4^{\lg 2} - 81^{0{,}5\log_9 7} + 5^{\log_{25} 49}$.

13. Вычислите x, если $\log_3 x = 1 + \log_3 7 \cdot \log_7 5 \cdot \log_5 4$

14. Вычислите x, если

$$\log_2 x = \log_2\left(\log_4\left(\log_8 64\right)\right) + \log_8 28 - \log_8 3{,}5.$$

15. Вычислите x, если $\log_3 x = \log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8\left(7\sqrt{7}\right)$.

16. Вычислите x, если $\log_2(x-1) = 36^{\frac{1}{3}\log_6 8 + 2\log_6 3} : 49^{\log_7 9}$.

Задания с развернутым ответом

17. Выразите x через z, если $x > 0$, $y = 10^{\frac{1}{1-\lg x}}$, $z = 10^{\frac{1}{1-\lg y}}$.

18. Упростите выражение $\dfrac{\log_{xy} x \sqrt{\left(\log_y x + \log_x y + 2\right)\log_x{}^3 y}}{\log_x y}$ и укажите допустимые значения x и y.

19. Упростите выражение

$$\frac{1}{\dfrac{1}{\log_{a_1} b} + \dfrac{1}{\log_{a_2} b} + \dfrac{1}{\log_{a_3} b} + \ldots + \dfrac{1}{\log_{a_n} b}}$$

при $a_i > 0$, $a_i \neq 1$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots)$, $b > 0$.

20. Упростите выражение

$$\frac{1}{1+\log_a b + \log_a c} + \frac{1}{1+\log_b a + \log_b c} + \frac{1}{1+\log_c a + \log_c b}$$

при $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, $c > 0$, $c \neq 1$.

21. Упростите выражение

$$\frac{1}{\dfrac{1}{1+\log_a b + \log_a c} + \dfrac{1}{1+\log_b a + \log_b c} + \dfrac{1}{1+\log_c a + \log_c b}}$$

при $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, $c > 0$, $c \neq 1$.

§ 2. Логарифмические уравнения и неравенства

Пример 1. Решите уравнение $\log_3(2x-1)=3$.

Решение.

$$\log_3(2x-1)=3 \Leftrightarrow 2x-1=3^3 \Leftrightarrow x=14.$$

Ответ: 14.

Пример 2. Решите уравнение $\log_{\frac{1}{2}}(5-\log_3 x)=-2$.

Решение.

$$\log_{\frac{1}{2}}(5-\log_3 x)=-2 \Leftrightarrow 5-\log_3 x=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 5-\log_3 x=4 \Leftrightarrow \log_3 x=1 \Leftrightarrow x=3.$$

Ответ: 3.

Пример 3. Решите уравнение $\log_{1-x}\sqrt{9+4x-x^2}=1$.

Решение.

$$\log_{1-x}\sqrt{9+4x-x^2}=1 \Leftrightarrow \begin{cases}1-x>0,\\ 1-x\neq 1,\\ \sqrt{9+4x-x^2}=1-x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x<1,\\ x\neq 0,\\ 9+4x-x^2=(1-x)^2\end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}x<1,\\ x\neq 0,\\ 9+4x-x^2=1-2x+x^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x<1,\\ x\neq 0,\\ x^2-3x-4=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x<1,\\ x\neq 0,\\ \left[\begin{array}{l}x=4\\ x=-1\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow x=-1.$$

Ответ: –1.

Сформулируем последовательность преобразований уравнения, содержащего два и более выражений, стоящих под знаком логарифма.

1. Все выражения, стоящие под знаком логарифма, указываются в системе как положительные.

2. Все логарифмы приводятся к одному основанию. При этом используется формула перехода к новому основанию.

3. При вынесении множителем показателя степени выражения, стоящего под знаком логарифма, остающееся под логарифмом выражение должно быть положительно:

$$\log_a f^p(x) = p\log_a |f(x)|,$$

p — четное натуральное число, $f(x) \neq 0$, $a > 0, a \neq 1$.

То же относится и к вынесению показателя степени выражения, стоящего в основании логарифма:

$$\log_{a^q(x)} f^p(x) = \frac{p}{q}\log_{|a(x)|} |f(x)|,$$

p, q — четные натуральные числа, $f(x) \neq 0$, $a(x) \neq 0$, $a(x) \neq 1$.

Пример 4. Решите уравнение.

$$\log_5(-2x) = \log_{\sqrt{5}}(x+1)$$

Решение.

$$\log_5(-2x) = \log_{\sqrt{5}}(x+1) \Leftrightarrow \begin{cases} -2x > 0, \\ x+1 > 0, \\ \log_5(-2x) = \log_5(x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 0, \\ -2x = (x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 0, \\ x^2 + 4x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 0, \\ \left[\begin{array}{l} x = -2 - \sqrt{3} \\ x = -2 + \sqrt{3} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = -2 + \sqrt{3}.$$

Ответ: $-2 + \sqrt{3}$.

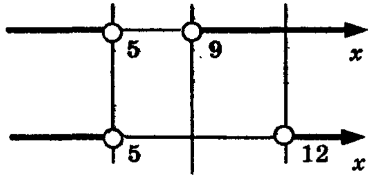
Пример 5. Решите уравнение

$$\log_5 \frac{x-9}{x-5} - \log_{\frac{1}{5}}(x^2 - 17x + 60) = 1 + \log_5 2.$$

Решение.

$$\log_5 \frac{x-9}{x-5} - \log_{\frac{1}{5}}(x^2 - 17x + 60) = 1 + \log_5 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-9}{x-5} > 0, \\ x^2 - 17x + 60 > 0, \\ \log_5 \dfrac{x-9}{x-5} + \log_5((x-5)(x-12)) = \log_5 10 \end{cases}.$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-9}{x-5} > 0, \\ (x-5)(x-12) > 0 \\ \log_5 \dfrac{(x-9)(x-5)(x-12)}{(x-5)} = \log_5 10 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x<5 \\ x>12 \end{array} \right. \\ (x-9)(x-12)=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x<5 \\ x>12 \end{array} \right. \\ x^2-21x+98=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x<5 \\ x>12 \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} x=14 \\ x=7 \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow x=14.$$

Ответ: 14.

Пример 6. Решите уравнение

$$3\log_3 x^5 = 6 + \log_3 x .$$

Решение.

$$3\log_3 x^5 = 6+\log_3 x \Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ 15\log_3 x = 6+\log_3 x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 14\log_3 x = 6 \Leftrightarrow \log_3 x = \frac{3}{7} \Leftrightarrow x = 3^{\frac{3}{7}}.$$

Ответ: $3^{\frac{3}{7}}$.

Пример 7. Решите уравнение

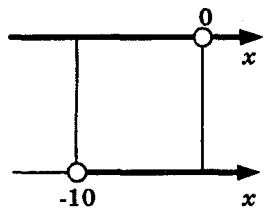
$$\log_{36}\frac{x^2}{16} + \log_6(x+10) = 1 .$$

Решение.

$$\log_{36}\frac{x^2}{16} + \log_6(x+10) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{2}\log_6 \dfrac{|x|}{4} + \log_6(x+10) = 1, \\ x^2 > 0, \\ x+10 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 0,\\ x+10>0,\\ \log_6\dfrac{|x|(x+10)}{4}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 0,\\ x>-10,\\ \dfrac{|x|(x+10)}{4}=6\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-10<x<0,\\ -x(x+10)=24\end{cases}\\ \begin{cases}x>0,\\ x(x+10)=24\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-10<x<0,\\ x^2+10x+24=0\end{cases}\\ \begin{cases}x>0,\\ x^2+10x-24=0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-10<x<0,\\ \left[\begin{array}{l}x=-4\\ x=-6\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}x>0,\\ \left[\begin{array}{l}x=-12\\ x=2\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-6\\ x=-4\\ x=2.\end{array}\right.$$



Ответ: –6; –4; 2.

Пример 8. Решите уравнение

$$\log_{2x+3}(x-2)^2=\log_{\frac{x}{6}+\frac{1}{2}}(x-2)^2.$$

Р е ш е н и е .

$$\log_{2x+3}(x-2)^2=\log_{\frac{x}{6}+\frac{1}{2}}(x-2)^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x+3>0,\\ 2x+3\neq 1,\\ x+3>0,\\ \dfrac{x+3}{6}\neq 1,\\ (x-2)^2>0,\\ \dfrac{\log_2(x-2)^2}{\log_2(2x+3)}=\dfrac{\log_2(x-2)^2}{\log_2\left(\dfrac{x+3}{6}\right)}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-\dfrac{3}{2},\\ x\neq 3,\\ x\neq -1,\\ x\neq 2,\\ \left[\begin{array}{l}\log_2(x-2)^2=0\\ \log_2(2x+3)=\log_2\left(\dfrac{x+3}{6}\right)\end{array}\right.\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{3}{2}, \\ x \neq 3, \\ x \neq -1, \\ x \neq 2, \\ \left[\begin{array}{l} |x-2| = 1 \\ 6(2x+3) = x+3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -\frac{15}{11}. \end{array}\right.$$

Ответ: $1; -\frac{15}{11}$.

Пример 9. Решите уравнение $\log_2(\log_5 x) = 1$.

Решение. Решение уравнения сводится к решению системы $\begin{cases} x > 0, \\ \log_5 x > 0, \\ \log_2(\log_5 x) = 1. \end{cases}$

$$\begin{cases} x > 0, \\ \log_5 x > 0, \\ \log_2(\log_5 x) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_5 x > 0, \\ \log_5 x = 2 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 25.$$

Ответ: 25.

Пример 10. Решите уравнение $\log^2_{\frac{1}{2}}(4x) + \log_2\left(\frac{x^2}{8}\right) + 7 = 0$.

Решение. Применяя формулу перехода к одному основанию, получим:

$$\log^2_{\frac{1}{2}}(4x) + \log_2\left(\frac{x^2}{8}\right) + 7 = 0 \Leftrightarrow \log^2_2(4x) + \log_2\left(\frac{x^2}{8}\right) + 7 = 0.$$

Далее, учитывая область определения функции и применяя свойства логарифмов положительных чисел, получаем, что данное уравнение сводится к системе

$$\begin{cases} x > 0, \\ (\log_2 x + 2)^2 + (2\log_2 x - 3) + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ \log^2_2 x + 6\log_2 x + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 x=-4\\ \log_2 x=-2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{16}\\ x=\dfrac{1}{4}.\end{array}\right.$$

Ответ: $\frac{1}{16}$; $\frac{1}{4}$.

Пример 11. Решите уравнение

$$\lg^2(x+1)=\lg(x+1)\lg(x-1)+2\lg^2(x-1).$$

Р е ш е н и е.

$$\lg^2(x+1)=\lg(x+1)\cdot\lg(x-1)+2\lg^2(x-1)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lg^2(x+1)-\lg(x-1)\cdot\lg(x+1)-2\lg^2(x-1)=0.$$

Рассматривая левую часть уравнения как квадратный трехчлен и применяя формулу разложения его на множители, получим:

$$\left(\lg(x+1)-2\lg(x-1)\right)\cdot\left(\lg(x+1)+\lg(x-1)\right)=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\lg(x+1)=2\lg(x-1)\\ \lg(x+1)+\lg(x-1)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}x>1,\\ x>-1,\\ \left[\begin{array}{l}x+1=(x-1)^2\\ (x+1)(x-1)=1\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>1,\\ \left[\begin{array}{l}x^2-3x=0\\ x^2-2=0\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3\\ x=\sqrt{2}.\end{array}\right.$$

Ответ: $\sqrt{2}$; 3.

Пример 12. Решите уравнение $3\log_2 x^2-\log_2^2(-x)=5$.

Р е ш е н и е.

$$3\log_2 x^2-\log_2^2(-x)=5\Leftrightarrow \begin{cases}x<0,\\ \log_2^2|x|-6\log_2|x|+5=0\end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}x<0,\\ \left[\begin{array}{l}\log_2|x|=1\\ \log_2|x|=5\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x<0,\\ \left[\begin{array}{l}|x|=2\\ |x|=32\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-2\\ x=-32\end{array}\right.$$

Ответ: –32; –2.

Пример 13. Решите уравнение

$$\log_{3x+7}\left(9+12x+4x^2\right)+\log_{2x+3}\left(6x^2+23x+21\right)=4.$$

Р е ш е н и е.

Заметим, что $9+12x+4x^2=(2x+3)^2$, а

$$6x^2+23x+21=(2x+3)(3x+7).$$

Выбирая одно из оснований, получим, что данное уравн
равносильно системе

$$\begin{cases}2x+3>0,\\ 2x+3\neq 1,\\ 3x+7>0,\\ 3x+7\neq 1,\\ 2\log_{3x+7}(2x+3)+\dfrac{\log_{3x+7}(2x+3)+1}{\log_{3x+7}(2x+3)}=4\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x>-\dfrac{3}{2},\\ x\neq -1,\\ 2\log^2_{3x+7}(2x+3)-3\log_{3x+7}(2x+3)+1=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x>-\dfrac{3}{2},\\ x\neq -1,\\ \left[\begin{array}{l}\log_{3x+7}(2x+3)=1\\ \log_{3x+7}(2x+3)=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-\dfrac{3}{2},\\ x\neq -1,\\ \left[\begin{array}{l}2x+3=3x+7\\ 2x+3=\sqrt{3x+7}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x>-\dfrac{3}{2},\\ x\neq -1,\\ \left[\begin{array}{l}x=-4\\ 4x^2+9x+2=0\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-\dfrac{3}{2},\\ x\neq -1,\\ \left[\begin{array}{l}x=-2\\ x=-\dfrac{1}{4}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=-\frac{1}{4}.$$

Ответ: $-\dfrac{1}{4}$.

2.1. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ РАЗЛИЧНЫХ СВОЙСТВ ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

Пример 14. Решите уравнение $\log_2(1+x^2)=\log_2 x+2x-x^2$.

Решение.

$$\log_2(1+x^2)=\log_2 x+2x-x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ 1+x^2>0, \\ \log_2\dfrac{1+x^2}{x}=1-(x-1)^2. \end{cases}$$

Применим неравенство Евклида: $\dfrac{1+x^2}{x}=x+\dfrac{1}{x}$, а т.к. $x>0$, то $x+\dfrac{1}{x}\geq 2$ и $\log_2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\geq 1$. Заметим также, что равенство достигается при $x=1$.

В свою очередь, $1-(x-1)^2\leq 1$, причем равенство достигается лишь при $x=1$. Следовательно, $x=1$ — единственный корень данного уравнения.

Ответ: 1.

Пример 15. Решите уравнение $\log_{12}\left(\sqrt{2x}+\sqrt[4]{2x}\right)=\dfrac{1}{2}\log_9(2x)$.

Решение.

$$\log_{12}\left(\sqrt{2x}+\sqrt[4]{2x}\right)=\frac{1}{2}\log_9(2x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\log_3\left(\sqrt{2x}+\sqrt[4]{2x}\right)}{\log_3 12}=\frac{1}{4}\log_3(2x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\log_3\left(\sqrt{2x}+\sqrt[4]{2x}\right)=\log_3\sqrt[4]{2x}\cdot\log_3 12\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\log_3\left(\sqrt[4]{2x}\left(\sqrt[4]{2x}+1\right)\right)=\log_3\sqrt[4]{2x}\cdot\log_3 12\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\log_3\sqrt[4]{2x}+\log_3\left(\sqrt[4]{2x}+1\right)=\log_3\sqrt[4]{2x}\left(1+\log_3 4\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\log_3\left(\sqrt[4]{2x}+1\right)=\log_3\sqrt[4]{2x}\cdot\log_3 4.$$

Множеством допустимых значений переменной x является промежуток $(0;+\infty)$.

Разделим его на два непересекающихся промежутка: $\left(0;\frac{1}{2}\right]$, $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

На первом промежутке $0<\sqrt[4]{2x}\le 1$, $\sqrt[4]{2x}+1>1$. Следовательно, $\log_3\sqrt[4]{2x}\le 0$, $\log_3\left(\sqrt[4]{2x}+1\right)>0$.

Поскольку $\log_3 4>0$, то знаки левой и правой частей уравнения $\log_3\left(\sqrt[4]{2x}+1\right)=\log_3\sqrt[4]{2x}\cdot\log_3 4$ различны, поэтому на первом промежутке уравнение не имеет корней.

На втором промежутке $\sqrt[4]{2x}>1$, $\log_3\sqrt[4]{2x}>0$ и уравнение может быть записано в виде:

$$\begin{cases}\dfrac{\log_3\left(\sqrt[4]{2x}+1\right)}{\log_3\sqrt[4]{2x}}=\log_3(3+1),\\ x>\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{\ln\left(\sqrt[4]{2x}+1\right)}{\ln\sqrt[4]{2x}}=\dfrac{\ln(3+1)}{\ln 3},\\ x>\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

Введем переменную $t=\sqrt[4]{2x}$. Полученная система принимает вид $\begin{cases}\dfrac{\ln(t+1)}{\ln t}=\dfrac{\ln(3+1)}{\ln 3}\\ t>1\end{cases}$ или $\begin{cases}f(t)=f(3)\\ t>1\end{cases}$, где $f(t)=\dfrac{\ln(t+1)}{\ln t}$.

Исследуем функцию $f(t)=\dfrac{\ln(t+1)}{\ln t}$ на промежутке $(1;+\infty)$ на монотонность. Отметим, что на указанном промежутке она везде определена.

Найдем производную функции $f(t)$:

$$f'(t)=\frac{\frac{1}{t+1}\ln t-\frac{1}{t}\ln(t+1)}{\ln^2 t}=\frac{t\ln t-(t+1)\ln(t+1)}{t(t+1)\ln^2 t}.$$

Так как при $t>1$ функции $y=t$, $y=\ln t$ монотонно возрастают и положительны, то их произведение $t\ln t$ также монотонно возрастает, следовательно, числитель дроби отрицателен. Поэтому производная функции $f(t)$ отрицательна. Функция убывает при $t>1$ и каждое свое значение принимает лишь при единственном значении аргумента.

Осталось заметить, что очевидным решением уравнения $f(t)=f(3)$ является $t=3$ или $\sqrt[4]{2x}=3$.

Откуда следует, что единственным решением исходного уравнения является $x=\frac{81}{2}$.

Ответ: $\frac{81}{2}$.

Пример 16. Найдите все действительные значения параметра b, при каждом из которых уравнение

$$\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2-(b+9)x+2b+14\right)+\log_3\left(2b-18+(2b-19)x-x^2\right)=0$$

имеет единственный корень.

Решение.

Рассмотрим квадратные трехчлены

$$f_1(x)=x^2-(b+9)x+2b+14$$

и

$$f_2(x)=-x^2+(2b-19)x+2b-18.$$

Уравнение может быть записано в виде:

$$\log_{\frac{1}{3}}f_1(x)+\log_3 f_2(x)=0\Leftrightarrow\log_3 f_2(x)=\log_3 f_1(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f_1(x)>0,\\ f_2(x)>0,\\ f_1(x)=f_2(x).\end{cases}$$

Так как

$$f_2(x)=-x^2+(2b-19)x+2b-18=-(x+1)(x-(2b-18)),$$

то исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}(x+1)(x-2b+18)<0,\\ 2x^2-(3b-10)x+32=0\end{cases}$$

и будет иметь единственный корень в том случае, если система будет иметь единственное решение.

В свою очередь, система может иметь единственное решение в двух случаях.

Первый — если дискриминант квадратного уравнения равен нулю, а его двойной корень удовлетворяет неравенству.

Второй — если квадратное уравнение имеет два различных корня, но только один из них удовлетворяет неравенству. Таким образом, искомые значения параметра b задаются совокупностью

$$
\left[\begin{array}{l}
\left\{\begin{array}{l}
(3b-10)^2-256=0,\\
x=\dfrac{3b-10}{4},\\
\left(\dfrac{3b-10}{4}+1\right)\left(\dfrac{3b-10}{4}-2b+18\right)<0
\end{array}\right.\\
\left(2(-1)^2+(3b-10)(-1)+32\right)\left(2(2b-18)^2-(3b-10)(2b-18)+32\right)<0 \\
\left\{\begin{array}{l}
\left(2(-1)^2+(3b-10)(-1)+32\right)\left(2(2b-18)^2-(3b-10)(2b-18)+32\right)=0\\
(x+1)(x-2b+18)<0,\\
2x^2-(3b-10)x+32=0
\end{array}\right.
\end{array}\right. \Leftrightarrow
$$

$$
\Leftrightarrow
\left[\begin{array}{l}
\left\{\begin{array}{l}
b=\dfrac{26}{3},\\
x=4,\\
5\left(4-\dfrac{52}{3}+18\right)<0
\end{array}\right.\\
\left\{\begin{array}{l}
b=-2,\\
x=-4,\\
(-4+1)(-4+4+18)<0
\end{array}\right.\\
(b+8)(b-10)(b-25)<0\\
\left\{\begin{array}{l}
(b+8)(b-10)(b-25)<0\\
(x+1)(x-2b+18)<0\\
2x^2-(3b-10)x+32=0
\end{array}\right.
\end{array}\right.
\Leftrightarrow
\left[\begin{array}{l}
\left\{\begin{array}{l}
b=-2,\\
x=-4
\end{array}\right.\\
b<-8\\
10<b<25\\
\left\{\begin{array}{l}
b=-8\\
(x+1)(x+34)<0\\
\left[\begin{array}{l}
x=-17\\
x=-1
\end{array}\right.
\end{array}\right.\\
\left\{\begin{array}{l}
b=10\\
(x+1)(x-2)<0\\
\left[\begin{array}{l}
x=2\\
x=8
\end{array}\right.
\end{array}\right.\\
\left\{\begin{array}{l}
b=25\\
(x+1)(x-32)<0\\
\left[\begin{array}{l}
x=\dfrac{1}{2}\\
x=32
\end{array}\right.
\end{array}\right.
\end{array}\right.
\Leftrightarrow
\left[\begin{array}{l}
\left\{\begin{array}{l}
b=-2,\\
x=-4
\end{array}\right.\\
b<-8\\
10<b<25\\
\left\{\begin{array}{l}
b=-8\\
x=-17
\end{array}\right.\\
\left\{\begin{array}{l}
b=25\\
x=\dfrac{1}{2}
\end{array}\right.
\end{array}\right.
$$

Ответ: $(-\infty;\ -8]\cup\{-2\}\cup(10;25]$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задания с выбором ответа

22. Найдите множество, которому принадлежит корень уравнения $\log_2(x+1)=1+2\log_2 x$.

1) $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ 2) $\left[\frac{1}{2};1\right]$

3) $(1;2)$ 4) $[2;3]$

23. Найдите произведение корней уравнения $\log_x 2+\log_{4x}4=1$.

1) 1 2) 2
3) 4 4) 6

24. Найдите отношение большего корня уравнения

$$\log_{0,5}^2 4x+\log_2\left(\frac{x^2}{8}\right)=8$$

к меньшему корню.

1) 4 2) 8
3) 128 4) 256

25. Найдите сумму квадратов корней уравнения

$$\log_4\log_3\log_2(x^2-1)=0.$$

1) 2 2) 5
3) 13 4) 18

26. Найдите сумму корней уравнения

$$\lg(x-1)+\lg(x+1)=3\lg 2+\lg(x-2).$$

1) 0 2) 2;
3) 8; 4) 11

Задания с кратким ответом

27. Найдите сумму целых чисел, лежащих между корнями уравнения $\log_x 2\cdot\log_{2x}2=\log_{4x}2$.

28. Найдите произведение корней уравнения

$$(x^2-18x+77)\cdot\left(\log_{\frac{x}{2}}8x+3\right)=0.$$

29. Решите уравнение $\lg\lg(x-1)=\lg\lg(2x+1)-\lg 2$.

30. Найдите сумму всех значений x и y, являющихся решениями системы уравнений $\begin{cases} \log_y x + \log_x y = 2, \\ x^2 - y = 20. \end{cases}$.

31. Найдите меньший корень уравнения $(x+1)^{(\log_2(x+1))^3} = 2$.

Задания с развернутым ответом

32. Решите уравнение

$$\log_2(2x+1)\log_3(2x+2)+\log_4(2x+3)\log_5(2x+4)=$$
$$=2\log_3(2x+2)\log_5(2x+4).$$

33. Найдите все значения x, удовлетворяющие уравнению $\log_{3a^2+2}\left(7-\sqrt{34+x}\right)=\log_{2a^2+3}(3-x)$ при любом действительном значении a.

34. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\log_{(a-4)(10-a)}\left(-x^2+4x-3\right)=\log_{(a-4)(10-a)}\left(\left(x-\frac{a}{4}-1\right)\left(x-\frac{a}{2}-2\right)\right)$ имеет единственный корень.

35. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $4^{-|x-a|}\log_{\sqrt{3}}\left(x^2-2x+3\right)+2^{-x^2+2x}\log_{\frac{1}{3}}\left(2|x-a|+2\right)=0$ имеет три корня.

36. Для каждого целого значения m найдите все корни уравнения $\log_{\left(\frac{m^2}{4}+x^2\right)}(3x)^{m^2+1}=m^2+1$.

37. Решите уравнение $\log_{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}\left(x^2-2x-2\right)=\log_{2+\sqrt{3}}\left(x^2-2x-3\right)$.

2.2. РЕШЕНИЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ

При решении логарифмических неравенств могут быть использованы следующие равносильности: для любого $a>0$, $a\neq 1$

$$\log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>0, \\ g(x)>0, \\ (a-1)(f(x)-g(x))<0, \end{cases}$$

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ (a-1)(f(x)-g(x)) > 0. \end{cases}$$

При этом для всех допустимых значений переменных разность $\log_a f(x) - \log_a g(x)$ имеет тот же знак, что и $(a-1)(f(x)-g(x))$.

Пример 1. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{7}}(5x-3) \geq -2$.

Решение.

$$\log_{\frac{1}{7}}(5x-3) \geq -2 \Leftrightarrow \begin{cases} 5x-3 > 0, \\ \left(\frac{1}{7}-1\right)\left(5x-3-\left(\frac{1}{7}\right)^{-2}\right) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{3}{5}, \\ 5x \leq 52 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3}{5} < x \leq \frac{52}{5}.$$

Ответ: $\left(\frac{3}{5}; \frac{52}{5}\right]$.

Пример 2. Решите неравенство $\log_2(x^2-2x) \geq 3$.

Решение. $\log_2(x^2-2x) \geq 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x > 0, \\ (2-1)(x^2-2x-8) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x > 0, \\ x^2-2x \geq 8 \end{cases} \Leftrightarrow x^2-2x-8 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 4 \\ x \leq -2 \end{array}\right..$$

Ответ: $(-\infty; -2] \cup [4; +\infty)$.

Пример 3. Решите неравенство $\log_2 x < \log_{\frac{1}{2}}(3x-1) - 2$.

Решение.

$$\log_2 x < \log_{\frac{1}{2}}(3x-1) - 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ 3x-1 > 0, \\ 2 + \log_2 x + \log_2(3x-1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{3}, \\ \log_2(4x\,(3x-1)) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x>\dfrac{1}{3},\\ \log_2\left(4x\cdot(3x-1)\right)<\log_2 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>\dfrac{1}{3},\\ 4x(3x-1)-1<0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x>\dfrac{1}{3},\\ 12x^2-4x-1<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>\dfrac{1}{3},\\ -\dfrac{1}{6}<x<\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}.$$

Ответ: $\left(\dfrac{1}{3};\ \dfrac{1}{2}\right)$.

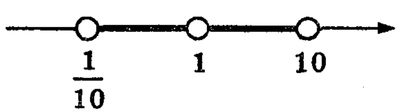
Пример 4. Решите неравенство $\dfrac{1}{\lg x+1}+\dfrac{1}{1-\lg x}>2$.

Решение.

$$\frac{1}{\lg x+1}+\frac{1}{1-\lg x}>2\Leftrightarrow\frac{1-\lg x+1+\lg x-2\left(1-\lg^2 x\right)}{(1+\lg x)(1-\lg x)}>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{2\lg^2 x}{(1-\lg x)(1+\lg x)}>0\Leftrightarrow\frac{(\lg x-\lg 1)^2}{(\lg 10-\lg x)\left(\lg x-\lg\dfrac{1}{10}\right)}>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x>0,\\ \dfrac{(x-1)^2}{(10-x)\left(x-\dfrac{1}{10}\right)}>0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{10}<x<1\\ 1<x<10.\end{array}\right.$$



Ответ: $\left(\dfrac{1}{10};\ 1\right)\cup(1;\ 10)$.

2.3. РЕШЕНИЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ С ПЕРЕМЕННЫМ ОСНОВАНИЕМ

При решении подобного рода неравенств надо учитывать, что основанием логарифма может быть только выражение, принимающее положительные значения, не равные единице. Поэтому записанные ранее равносильности примут вид:

$$\log_{a(x)} f(x) < \log_{a(x)} g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a(x) > 0, \\ a(x) \neq 1, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ (a(x)-1)(f(x)-g(x)) < 0; \end{cases}$$

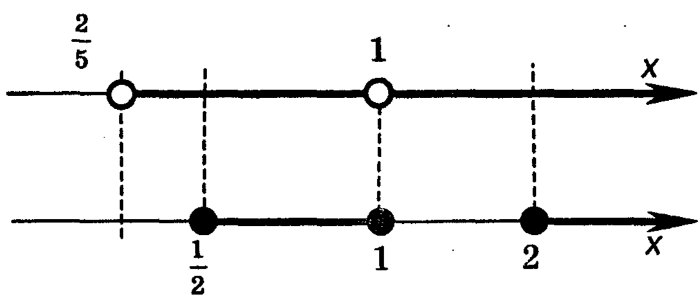
$$\log_{a(x)} f(x) > \log_{a(x)} g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a(x) > 0, \\ a(x) \neq 1, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ (a(x)-1)(f(x)-g(x)) > 0. \end{cases}$$

При этом при всех допустимых значениях переменных выражение $\log_{a(x)} f(x) - \log_{a(x)} g(x)$ имеет тот же знак, что и

$$(a(x)-1)(f(x)-g(x)).$$

Пример 5. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{x}}\left(\frac{5}{2}x-1\right) \geq -2$.

Решение.



$$\log_{\frac{1}{x}}\left(\frac{5}{2}x-1\right) \geq -2 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ \frac{5}{2}x - 1 > 0, \\ \log_x\left(\frac{5}{2}x-1\right) \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{2}{5}, \\ x \neq 1, \\ (x-1)\left(\frac{5}{2}x - 1 - x^2\right) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x>\dfrac{2}{5},\\ x\neq 1,\\ (x-1)\left(2x^2-5x+2\right)\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{2}\leq x<1\\ x\geq 2.\end{array}\right.$$

Ответ: $\left[\dfrac{1}{2};\ 1\right)\cup[2;\ +\infty)$.

Пример 6. Решите неравенство

$$\log_{2x-x^2}\left(x-\frac{3}{2}\right)>0.$$

Р е ш е н и е.

$$\log_{2x-x^2}\left(x-\frac{3}{2}\right)>0\Leftrightarrow\begin{cases} 2x-x^2>0,\\ 2x-x^2\neq 1,\\ x-\dfrac{3}{2}>0,\\ \left(2x-x^2-1\right)\left(x-\dfrac{3}{2}-1\right)>0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x(x-2)<0,\\ x>\dfrac{3}{2},\\ x\neq 1\\ -(x-1)^2\left(x-\dfrac{5}{2}\right)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 0<x<2,\\ x>\dfrac{3}{2},\\ (x-1)^2\left(x-\dfrac{5}{2}\right)<0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} \dfrac{3}{2}<x<2,\\ x<\dfrac{5}{2}\\ x\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\frac{3}{2}<x<2.$$

Ответ: $\left(\dfrac{3}{2};\ 2\right)$.

Пример 7. Решите неравенство

$$\log_{10-x}\left(\frac{19}{2}-x\right)^2>2\log_{x-9}(x-9).$$

Р е ш е н и е .

$$\log_{10-x}\left(\frac{19}{2}-x\right)^2>2\log_{x-9}(x-9)\Leftrightarrow\begin{cases}10-x>0,\\10-x\neq1,\\\frac{19}{2}-x\neq0,\\x-9>0,\\x-9\neq1,\\\log_{10-x}\left(\frac{19}{2}-x\right)^2>2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}9<x<10,\\x\neq\frac{19}{2},\\(10-x-1)\left(\left(\frac{19}{2}-x\right)^2-(10-x)^2\right)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}9<x<10,\\x\neq\frac{19}{2},\\(9-x)\left(\frac{39}{2}-2x\right)\left(-\frac{1}{2}\right)>0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}9<x<10,\\x\neq\frac{19}{2},\\x<\frac{39}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}9<x<\frac{19}{2},\\\frac{19}{2}<x<\frac{39}{4}.\end{array}\right.$$

Ответ: $\left(9;\ \frac{19}{2}\right)\cup\left(\frac{19}{2};\ \frac{39}{4}\right)$.

Пример 8. Решите неравенство

$$\log_x(x+1)<\log_{\frac{1}{x}}(2-x).$$

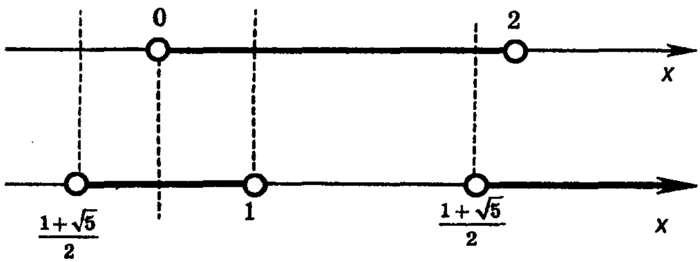
Р е ш е н и е .

$$\log_x(x+1)<\log_{\frac{1}{x}}(2-x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\log_x(x+1)+\log_x(2-x)<0\Leftrightarrow\begin{cases}x>0,\\x\neq1,\\x+1>0,\\2-x>0,\\\log_x((x+1)(2-x))<0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 2, \\ x \neq 1, \\ (x-1)\big((x+1)(2-x)-1\big) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 2, \\ x \neq 1, \\ (x-1)\left(-x^2+x+1\right) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 2, \\ (x-1)\left(x^2-x-1\right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x < 1 \\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} < x < 2. \end{array} \right.$$



Ответ: $(0;\ 1) \cup \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2};\ 2\right)$.

Пример 9. Решите неравенство

$$\frac{\log_{2x}(5x-1)\cdot\log_{3x}(7x-1)}{\log_2\left(15x^2+2\right)-\log_2 11x} \geq 0 .$$

Решение.

$$\frac{\log_{2x}(5x-1)\cdot\log_{3x}(7x-1)}{\log_2\left(15x^2+2\right)-\log_2 11x} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{1}{5}, \\ x \neq \dfrac{1}{2}, \\ x \neq \dfrac{1}{3}, \\ \dfrac{(2x-1)(5x-2)(3x-1)(7x-2)}{\left(15x^2+2-11x\right)} \geq 0. \end{cases}$$

Последнее неравенство системы получено заменой каждого множителя на выражение того же знака. Раскладывая квадратный трехчлен, стоящий в знаменателе, на множители, получим, что данная система равносильна следующей системе:

$$\begin{cases} x>\frac{1}{5}, \\ x\neq\frac{1}{2}, \\ x\neq\frac{1}{3}, \\ \frac{(2x-1)(5x-2)(3x-1)(7x-2)}{(3x-1)(5x-2)}\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\frac{1}{5}, \\ x\neq\frac{1}{2}, \\ x\neq\frac{1}{3}, \\ x\neq\frac{2}{5}, \\ \left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{2}{7}\right)\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &\frac{1}{5}<x\leq\frac{2}{7}, \\ &x>\frac{1}{2}. \end{aligned}\right.$$

Ответ: $\left(\frac{1}{5};\frac{2}{7}\right]\cup\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

2.4. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА С ПАРАМЕТРАМИ

Пример 10. При каких положительных значениях параметра a неравенство $\log_{\frac{4}{3}ax}(x-a)<0$ не имеет решения?

Решение.

Исходя из определения основания и аргумента логарифмической функции, получим, что данное неравенство $\log_{\frac{4}{3}ax}(x-a)<0$ равносильно совокупности систем неравенств:

$$\left[\begin{aligned} &\begin{cases} 0<\frac{4}{3}ax<1, \\ x-a>0, \\ x-a>1 \end{cases} \\ &\begin{cases} \frac{4}{3}ax>1, \\ x-a>0, \\ x-a<1 \end{cases} \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} ax>0, \\ x>a, \\ \frac{4}{3}ax\neq 1, \\ \left(\frac{4}{3}ax-1\right)(x-a-1)<0. \end{cases}$$

Так как $a>0$, то полученная система равносильна следующей:

$$\begin{cases} x>a, \\ \left(x-\frac{3}{4a}\right)(x-(a+1))<0. \end{cases}$$

Определим взаимное расположение чисел a, $\frac{3}{4a}$, $a+1$ при условии, что $a>0$.

Для этого решим системы неравенств (заметим при этом, что неравенство $a+1>a$ верно при любых a):

$$\begin{cases} \frac{3}{4a}<a, \\ a>0 \end{cases} \Leftrightarrow a>\frac{\sqrt{3}}{2}; \begin{cases} \frac{3}{4a}>a, \\ a>0 \end{cases} \Leftrightarrow 0<a<\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\begin{cases} \frac{3}{4a}<a+1, \\ a>0 \end{cases} \Leftrightarrow a>\frac{1}{2}; \begin{cases} \frac{3}{4a}>a+1, \\ a>0 \end{cases} \Leftrightarrow 0<a<\frac{1}{2}.$$

Таким образом, при $0<a<\frac{1}{2}$ имеем $a<a+1<\frac{3}{4a}$, и решениями системы $\begin{cases} x>a, \\ \left(x-\frac{3}{4a}\right)(x-(a+1))<0 \end{cases}$ является интервал

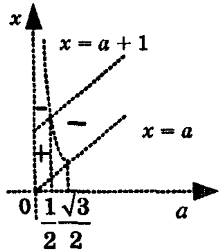
$$\left(a+1;\ \frac{3}{4a}\right).$$

При $a=\frac{1}{2}$ получим $a+1=\frac{3}{4a}$, и второе неравенство, а вместе с ним и вся система, решений не имеет.

При $\frac{1}{2}<a<\frac{\sqrt{3}}{2}$ имеем $a<\frac{3}{4a}<a+1$, решением системы является интервал $\left(\frac{3}{4a};\ a+1\right)$.

При $a\geq\frac{\sqrt{3}}{2}$ имеем $0<\frac{3}{4a}\leq a<a+1$, решением системы является интервал $(a;\ a+1)$.

Проиллюстрируем аналитическое решение системы, изобразив геометрическое место точек (ГМТ) на координатной плоскости aOx.



Ответ: 0,5.

Пример 11. Решите неравенство $\log_{\frac{a^2+x^2}{2}} x \geq 1$.

Р е ш е н и е.

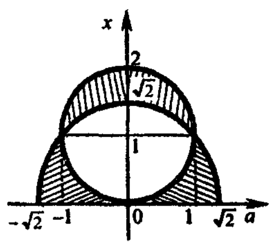
$$\log_{\frac{a^2+x^2}{2}} x \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a^2+x^2}{2} > 0, \\ a^2+x^2 \neq 2, \\ x > 0, \\ \left(\dfrac{a^2+x^2}{2}-1\right)\left(x-\dfrac{a^2+x^2}{2}\right) \geq 0. \end{cases}$$

Первое неравенство не выполняется лишь в том случае, если $x = a = 0$.

Учитывая это, получим, что систему можно записать в виде

$$\begin{cases} a^2+x^2 \neq 2, \\ x > 0, \\ \dfrac{2x-a^2-x^2}{a^2+x^2-2} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+x^2 \neq 2, \\ x > 0, \\ \dfrac{a^2+(x-1)^2-1}{a^2+x^2-2} \leq 0. \end{cases}$$

Построим ГМТ, соответствующее данной системе неравенств. Неравенство $x > 0$ системы задает верхнюю полуплоскость координатной плоскости $(a;\ x)$.



Неравенство $\dfrac{a^2+(x-1)^2-1}{a^2+x^2-2}\le 0$ определяет область, ограниченную дугами окружностей, заданных уравнениями

$$a^2+(x-1)^2=1,$$

$$a^2+x^2=2.$$

Опираясь на полученную иллюстрацию, легко получить аналитическое решение исходной системы неравенств.

Получим совокупность:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}1\le|a|<\sqrt{2},\\ 0<x<\sqrt{2-a^2}\end{cases}\\ \begin{cases}0<|a|<1,\\ \left[\begin{array}{l}0<x\le 1-\sqrt{1-a^2}\\ \sqrt{2-a^2}<x\le 1+\sqrt{1-a^2}\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}a=0,\\ \sqrt{2}<x\le 2.\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: если $|a|\ge\sqrt{2}$, данное неравенство решений не имеет;

если $1\le|a|<\sqrt{2}$, $\left(0;\sqrt{2-a^2}\right)$;

если $0<|a|<1$ $\left(0;1-\sqrt{1-a^2}\right]\cup\left(\sqrt{2-a^2};1+\sqrt{1-a^2}\right]$;

если $a=0$ $\left(\sqrt{2};2\right]$.

Пример 12. **Найдите все значения параметра a, при каждом из которых для любого значения x справедливо неравенство $\log_{\frac{a+1}{a+2}}\left(x^2+3\right)>1$.**

Решение.

$$\log_{\frac{a+1}{a+2}}(x^2+3)>1\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{a+1}{a+2}>0,\\ \dfrac{a+1}{a+2}\ne 1,\\ \left(\dfrac{a+1}{a+2}-1\right)\left(x^2+3-\dfrac{a+1}{a+2}\right)>0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a < -2 \\ a > -1, \end{array}\right. \\ \dfrac{1}{a+2} \cdot \left(x^2 + \dfrac{2a+5}{a+2}\right) < 0. \end{cases}$$

Рассмотрим два случая.

Пусть $a > -1$. Тогда получим, что $\dfrac{1}{a+2} > 0$ и $\dfrac{2a+5}{a+2} > 0$, следовательно, $\dfrac{1}{a+2}\left(x^2 + \dfrac{2a+5}{a+2}\right) > 0$ для любых x, что не удовлетворяет условию задачи.

Пусть теперь $a < -2$. В этом случае $\dfrac{1}{a+2} < 0$ и, для того чтобы неравенство $\dfrac{1}{a+2}\left(x^2 + \dfrac{2a+5}{a+2}\right) < 0$ было верно для любых x, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $\dfrac{2a+5}{a+2} > 0$.

Получим систему $\begin{cases} a+2 < 0, \\ \dfrac{2a+5}{a+2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+2 < 0, \\ 2a+5 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow a < -\dfrac{5}{2}$.

Ответ: $\left(-\infty; -\dfrac{5}{2}\right)$.

Пример 13. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых для любых значений параметра b неравенство

$$\left|\log_4 \frac{x}{16} - \frac{10a+7b-11}{5}x^2 - 49b^2 + 21b - 1\right| \le$$

$$\le \log_4 \frac{16}{x} - \frac{10a+7b-21}{5}x^2 + (14b-2)x - 49b^2 - 35b + 3$$

имеет хотя бы одно решение.

Решение.

Неравенство $\left|\log_4 \dfrac{x}{16} - \dfrac{10a+7b-11}{5}x^2 - 49b^2 + 21b - 1\right| \le$

$$\le \log_4 \frac{16}{x} - \frac{10a+7b-21}{5}x^2 + (14b-2)x - 49b^2 - 35b + 3$$

можно сначала записать в виде равносильной ему системы неравенств:

$$\begin{cases}\log_4\frac{x}{16}-\frac{10a+7b-11}{5}x^2-49b^2+21b-1\le\\ \le\log_4\frac{16}{x}-\frac{10a+7b-21}{5}x^2+(14b-2)x-49b^2-35b+3,\\ \log_4\frac{x}{16}-\frac{10a+7b-11}{5}x^2-49b^2+21b-1\ge\\ \ge-\log_4\frac{16}{x}+\frac{10a+7b-21}{5}x^2-(14b-2)x+49b^2+35b-3.\end{cases}$$

Мы использовали равносильный переход:

$$|f(x)|\le g(x)\Leftrightarrow -g(x)\le f(x)\le g(x).$$

После упрощений получим систему

$$\begin{cases}\log_4 x\le x^2+(7b-1)x+(7b-1)^2-2(7b-1)+1,\\ \frac{10a+7b-16}{5}x^2+(7b-1)x+(7b-1)\le 0.\end{cases}$$

Обозначим $7b-1=c$. Тогда система еще более упростится. Получим:

$$\begin{cases}\log_4 x\le x^2+cx+(c-1)^2,\\ \left(2a-3+\frac{c}{5}\right)x^2-cx+c\le 0.\end{cases}$$

Так как b может принимать произвольные значения, то c — тоже.

Положим $c=0$. Тогда второе неравенство системы примет вид $(2a-3)x^2\le 0$.

Но учитывая, что $\log_4 x$ определен при $x>0$, получаем, что

$$\begin{cases}x>0,\\ (2a-3)x^2\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0,\\ a\le\frac{3}{2}.\end{cases}$$

Следовательно, условие $a\le\frac{3}{2}$ является необходимым условием того, что система может иметь решения при всех значениях параметра b.

Докажем, что это же условие является достаточным.

Найдем какое-либо значение переменной x, удовлетворяющее системе при любом значении параметра c, а, следовательно, и b. При условии, что $a \le \frac{3}{2}$, второе неравенство запишется в виде $(2a-3)x^2 + \frac{c}{5}(x^2 - 5x + 5) \le 0$.

Так как первое слагаемое при указанном условии неположительное, то достаточно, чтобы второе слагаемое было равно 0 при всёх значениях c.

$$x^2 - 5x + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{5+\sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{5-\sqrt{5}}{5}. \end{array}\right.$$

Запишем первое неравенство системы в виде

$$\log_4 x \le c^2 - (2-x)c + x^2 - 4x + 1 + 4x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \log_4 x \le \left(c - (2-x)\right)^2 + 4x - 3$$

Подставим $x = \frac{5+\sqrt{5}}{4}$ в неравенство и сравним значения обеих частей. Достаточно доказать, что при $x = \frac{5+\sqrt{5}}{4}$ верно неравенство $\log_4 \frac{5+\sqrt{5}}{4} < 4 \cdot \frac{5+\sqrt{5}}{4} - 3$.

Действительно,

$$\log_4 \frac{5+\sqrt{5}}{4} < \log_4 \frac{5+3}{4} = \frac{1}{2}.$$

$$4 \cdot \frac{5+\sqrt{5}}{4} - 3 = 2 + \sqrt{5} > \frac{1}{2}.$$

Таким образом, $x = \frac{5+\sqrt{5}}{4}$ является решением как первого, так и второго неравенств системы при любом значении параметра c, а, следовательно, и параметра b.

Ответ: $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right]$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задания с выбором ответа

38. Найдите наименьшее целое число, **не являющееся** решением неравенства $\lg\frac{x-2}{x-3}<0$.

1) 1
2) 2
3) 3
4) 4

39. Найдите сумму целых чисел, не являющихся решениями неравенства $\log_7\left(x^2-2x-3\right)\geq 0$.

1) 1
2) 2
3) 3
4) 5

40. Укажите множество решений неравенства

$$\log_3\frac{12x-5}{8-12x}+\log_{\frac{1}{3}}x\leq 0.$$

1) $\left(0;\frac{1}{3}\right]$;
2) $\left(\frac{1}{3};\frac{5}{12}\right)$.
3) $\left[\frac{5}{12};\frac{1}{2}\right]$
4) $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right]$

41. Найдите наименьшее целое число, являющееся решение неравенства $\log_{\frac{1}{5}}\left(\log_5\frac{x^2+x}{x+4}\right)<0.$

1) -1
2) -2
3) -3
4) 9

42. Укажите множество решений неравенства

$$\log_3\left(x^2+6x+8\right)+\log_{\frac{1}{3}}(x+2)<\log_3 7.$$

1) $(-2; 3)$
2) $[-2; 3)$
3) $(-2; 3]$
4) $[-2; 3]$

Задания с кратким ответом

43. Решите неравенство $\frac{\left(\log_2 x-1\right)\left(x^2-5x+6\right)}{(2x+1)^2}\geq 0$.

44. Решите неравенство $\log_3 \frac{3}{x} \cdot \log_5 x + \log_5 45 \cdot \log_3 x \geq 1 + 2\log_5 3$.

45. Решите неравенство $\log_{x+1}\left(\frac{3}{6-2x}\right) \geq -2$.

46. Решите неравенство $\log_{2-5x} 3 + \frac{1}{\log_2 2-5x} \leq \frac{1}{\log_6\left(6x^2-6x+1\right)}$.

47. Решите неравенство

$$\frac{(x-2)(x-3)\log_3(2x+5)-(x+1)}{(x-2)(x-3)} \geq \left|\log_3(2x+5)\right| + \left|\frac{(x+1)}{(x-2)(x-3)}\right|.$$

Задания с развернутым ответом

48. При каких значениях параметра a неравенство

$$1+\log_2\left(2x^2+2x+\frac{7}{2}\right) \geq \log\left(ax^2+a\right)$$

имеет хотя бы одно решение?

49. При каких значениях параметра a неравенство

$$\log_{a(a+1)}\left(|x|+4\right) > 1$$

верно при всех значениях переменной x?

50. При каких значениях параметра a неравенство

$$\log_{\frac{1}{a}}\left(\sqrt{x^2+ax+5}+1\right) \cdot \log_5\left(x^2+ax+6\right) + \log_a 3 > 0$$

имеет единственное решение?

51. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых для любых значений параметра b неравенство

$$\left|\log_4 \frac{x}{16} - \frac{10a+7b-11}{5}x^2 - 49b^2 + 21b - 1\right| \leq$$

$$\leq \log_4 \frac{16}{x} - \frac{10a+7b-21}{5}x^2 + (14b-2)x - 49b^2 - 35b + 3$$

имеет хотя бы одно решение.

52. Найдите все тройки натуральных чисел x, y, z, удовлетворяющих неравенству

$$\log_2(2x+3y-6z+3) + \log_2(3x-5y+2z-2) +$$

$$+\log_2(2y+4z-5x+2) > z^2 - 9z + 17.$$

§ 3. Исследование свойств логарифмической функции

Пример 1. Укажите наибольшее из чисел

$$\log_5 \frac{1}{2},\ \log_5 2\frac{1}{2},\ \log_{0,2} \frac{1}{4},\ \log_{0,2} 1.$$

1) $\log_5 \frac{1}{2}$

2) $\log_5 2\frac{1}{2}$

3) $\log_{0,2} \frac{1}{4}$

4) $\log_{0,2} 1$

Решение.

Используя свойства логарифмов положительных чисел, преобразуем данные выражения:

$$\log_5 2\frac{1}{2},\ \log_5 \frac{1}{2},\ \log_{0,2} \frac{1}{4},\ \log_{0,2} 1,\ \log_5 2\frac{1}{2} = \log_5 \frac{5}{2},$$

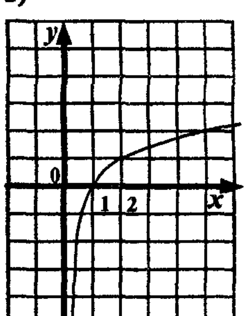
$$\log_{0,2} \frac{1}{4} = \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{4} = \log_5 4,\ \log_{0,2} 1 = 0 = \log_5 1.$$

Так как $\frac{1}{2} < \frac{5}{2} < 4$, а функция $y = \log_5 x$ возрастает на множестве положительных чисел, то наибольшее из чисел будет $\log_5 2\frac{1}{2}$.

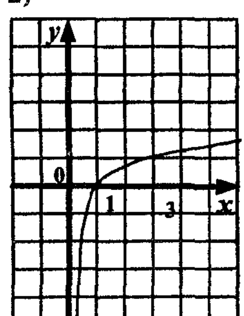
Номер верного ответа — 3).

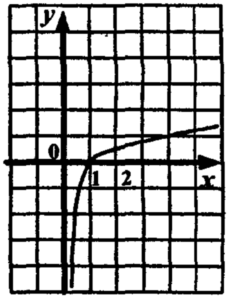
Пример 2. На рисунках представлены графики логарифмических функций. Укажите график функции $y = \log_2 x$.

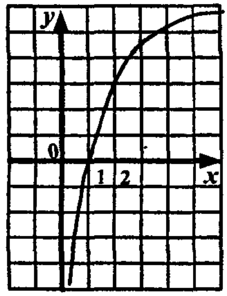
1)



2)



3) 

4) 

Решение.

Так как график функции $y=\log_2 x$ проходит через точку с координатами $(2;1)$, то искомый график имеет номер 1).

Номер верного ответа — 1).

Пример 3. Найдите область определения функции

$$y=\log\sqrt{2x-x^2}.$$

Решение.

Так как логарифмическая функция определена при положительных значениях аргумента, то область определения данной функции задается неравенством $2x-x^2>0$.

$$2x-x^2>0 \Leftrightarrow x(2-x)>0 \Leftrightarrow 0<x<2.$$

Пример 4. Найдите значение производной функции $y=\ln x+x+5$ в точке $x_0=2$.

Решение.

$$y'(x)=(\ln x+x+5)'=\frac{1}{x}+1. \quad y'(2)=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}.$$

Пример 5. На графике функции $y=\ln(x+1)+2x$ найдите точку, в которой угловой коэффициент касательной равен $2\frac{1}{2}$.

Решение.

Угловой коэффициент касательной, проведенной в данной точке графика функции, равен значению производной функции.

Пусть x_0 — абсцисса точки касания.

Тогда $2\frac{1}{2}=y'(x_0)$. $y'(x_0)=\frac{1}{x_0+1}+2$, откуда $x_0=1$.

Найдем ординату точки касания: $y(1)=\ln 2+2$.

Таким образом, точка касания имеет координаты $(1;\ln 2+2)$.

Пример 6. Сравните числа $F(2)$ и $F(4)$, если $F(x)$ — первообразная функции $f(x)=(x+1)\ln(12-x)$.

Решение. Так как функция $F(x)$ — первообразная функции $f(x)=(x+1)\ln(12-x)$, то функция $F(x)$ возрастает, если $f(x)>0$, и убывает, если $f(x)<0$.

Решим неравенство $(x+1)\ln(12-x)>0$.

$$(x+1)\ln(12-x)>0 \Leftrightarrow \begin{cases}12-x>0,\\ (x+1)(12-x-1)>0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x<12,\\ -1<x<11\end{cases} \Leftrightarrow -1<x<11.$$

Следовательно, на отрезке $[-1;11]$ $F(x)$ возрастает. А так как $2\in[-1;11]$, $4\in[-1;11]$, то $F(2)<F(4)$.

Пример 7. Решите уравнение

$$\log_2(1+x^2)=\log_2 x+2x-x^2.$$

Решение.

$$\log_2(1+x^2)=\log_2 x+2x-x^2 \Leftrightarrow \begin{cases}x>0,\\ \log_2\dfrac{1+x^2}{x}=1-(x-1)^2.\end{cases}$$

Применим неравенство Евклида: $\frac{1+x^2}{x}=x+\frac{1}{x}$, а т.к. $x>0$, то $x+\frac{1}{x}\geq 2$ и $\log_2\left(x+\frac{1}{x}\right)\geq 1$. Заметим также, что равенство достигается при $x=1$.

В свою очередь, правая часть уравнения $1-(x-1)^2\leq 1$, причем равенство достигается лишь при $x=1$. Следовательно, $x=1$ — единственное решение данного уравнения.

Пример 8. Решите уравнение

$$\log_{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}\left(x^2-2x-2\right)=\log_{2+\sqrt{3}}\left(x^2-2x-3\right).$$

Решение.

Рассмотрим числа, являющиеся основаниями логарифмов:

$$2\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{8+4\sqrt{3}}\ ;\ 2+\sqrt{3}=\sqrt{7+4\sqrt{3}}\ .$$

Следовательно, уравнение

$$\log_{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}\left(x^2-2x-2\right)=\log_{2+\sqrt{3}}\left(x^2-2x-3\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\log_{8+4\sqrt{3}}\left(x^2-2x-2\right)=\log_{7+4\sqrt{3}}\left(x^2-2x-3\right).$$

Переходя к единому основанию, получаем:

$$\frac{\log_{7+4\sqrt{3}}\left(x^2-2x-2\right)}{\log_{7+4\sqrt{3}}\left(8+4\sqrt{3}\right)}=\log_{7+4\sqrt{3}}\left(x^2-2x-3\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\log_{7+4\sqrt{3}}\left(x^2-2x-2\right)}{\log_{7+4\sqrt{3}}\left(x^2-2x-3\right)}=\log_{7+4\sqrt{3}}\left(8+4\sqrt{3}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\log_{x^2-2x-3}\left(x^2-2x-2\right)=\log_{7+4\sqrt{3}}\left(8+4\sqrt{3}\right).$$

Рассмотрим функцию $f(t)=\log_t(t+1)=\dfrac{\ln(t+1)}{\ln t}$. Как следует из предыдущего примера, данная функция является убывающей на области определения.

Уравнение записывается в виде $f\left(x^2-2x-2\right)=f\left(7+4\sqrt{3}\right)$. В силу монотонности получим:

$$f\left(x^2-2x-3\right)=f\left(7+4\sqrt{3}\right)\Leftrightarrow x^2-2x-3=7+4\sqrt{3}.$$

$$x^2-2x-3=7+4\sqrt{3}\Leftrightarrow x^2-2x-\left(10+4\sqrt{3}\right)=0\Leftrightarrow\ .$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1+\sqrt{11+4\sqrt{3}}\\ x=1-\sqrt{11+4\sqrt{3}}.\end{array}\right.$$

Ответ: $1-\sqrt{11+4\sqrt{3}};\ 1+\sqrt{11+4\sqrt{3}}$.

Пример 9. При каких значениях параметра a неравенство $\log_a 5+\log_{\frac{1}{3}}\left(\sqrt{ax^2+2x+6}+1\right)\cdot\log_a\left(ax^2+2x+7\right)\le 0$ имеет единственное решение?

Р е ш е н и е . Перейдем к основанию, равному a. Имеем:

$$\log_a 5+\log_{\frac{1}{3}}\left(\sqrt{ax^2+2x+6}+1\right)\cdot\log_a\left(ax^2+2x+7\right)\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\log_a 5\le\frac{\log_a\left(\sqrt{ax^2+2x+6}+1\right)\log_a\left(ax^2+2x+7\right)}{\log_a 3}.$$

Введем новую переменную $t=\sqrt{ax^2+2x+6}$, $t\ge 0$. Тогда неравенство запишется в виде $\log_a 5\le\frac{\log_a(t+1)\log_a\left(t^2+1\right)}{\log_a 3}$ и будет равносильно совокупности систем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<a<1,\\ \log_a 3\cdot\log_a 5\ge\log_a(t+1)\cdot\log_a\left(t^2+1\right)\end{cases}\\ \begin{cases}a>1,\\ \log_a 3\cdot\log_a 5\le\log_a(t+1)\log_a\left(t^2+1\right)\end{cases}\end{array}\right.$$

Рассмотрим функцию

$$f(t)=\log_a(t+1)\log_a\left(t^2+1\right)=\frac{1}{\ln^2 a}\ln(t+1)\ln\left(t^2+1\right),\ a>0,\ a\ne 1.$$

Найдем производную функции:

$$f'(t)=\frac{1}{\ln^2 a}\left(\frac{\ln\left(t^2+1\right)}{t+1}+\frac{2t\cdot\ln(t+1)}{t^2+1}\right).$$

Производная положительна при любом неотрицательном значении, следовательно, функция возрастает на области определения.

Тогда совокупность систем можно записать в виде

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<a<1,\\ f(2)\ge f(t)\end{cases}\\ \begin{cases}a>1,\\ f(2)\le f(t)\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<a<1,\\ 0\le t\le 2\end{cases}\\ \begin{cases}a>1,\\ t\ge 2.\end{cases}\end{array}\right.$$

Возвращаясь к исходным обозначениям, получим:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<a<1,\\ 0\le ax^2+2x+6\le 4\end{cases}\\ \begin{cases}a>1,\\ ax^2+2x+2\ge 0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Очевидно, что вторая система совокупности при любом значении $a>1$ будут иметь бесконечное множество решений.

Следовательно, осталось найти значения a из промежутка (0; 1) такие, чтобы первая система имела единственное решение:

$$\begin{cases} 0<a<1, \\ ax^2+2x+6\geq 0, \\ ax^2+2x+2\leq 0. \end{cases}$$

Данная система может иметь единственное решение в тех случаях, когда второе неравенство имеет единственное решение, являющееся решением первого, или когда ровно один корень квадратного трехчлена из третьего неравенства является корнем трехчлена из второго неравенства.

Но легко видеть, что трехчлены ax^2+2x+6 и ax^2+2x+2 общих корней не имеют, т.к. их разность есть постоянное число.

Таким образом, осталось найти значения параметра, при которых второе неравенство имеет единственное решение.

Это возможно тогда, когда $D(a)=1-4a=0$, т.е. при $a=\frac{1}{4}$.

Решением второго неравенства при $a=\frac{1}{4}$ является $x=-2$.

Осталось убедиться, что пара $\left(\frac{1}{4};-2\right)$ удовлетворяет оставшемуся неравенству системы, что производится непосредственной подстановкой.

$$\frac{1}{4}(-2)^2+2(-2)+6>0.$$

Ответ: 0,25.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задания с выбором ответа

53. Касательная к графику функции $f(x)=x+3-\ln(2x-1)$ параллельна оси абсцисс. Найдите абсциссу точки касания.

1) 1 2) 1,5
3) 2 4) 2,5

54. Касательная к графику функции $f(x)=\ln(4x-1)$ параллельна прямой $y=x$. Найдите абсциссу точки касания.

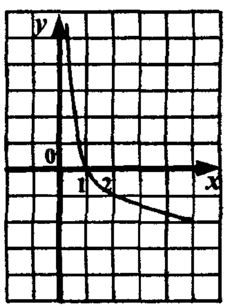
1) 1,25 2) 1
3) 0,5 4) 2

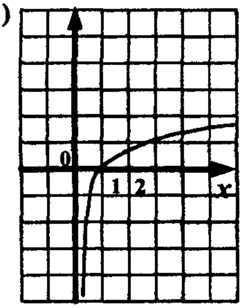
55. Найдите наибольшее целое число, принадлежащее промежутку возрастания функции $f(x)=2\ln(x-2)-x^2+4x+1$.

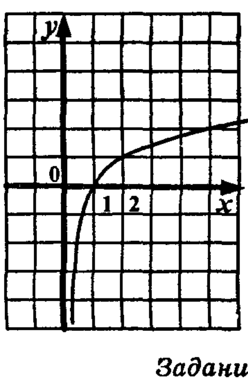
1) 4 2) 2
3) 3 4) 1

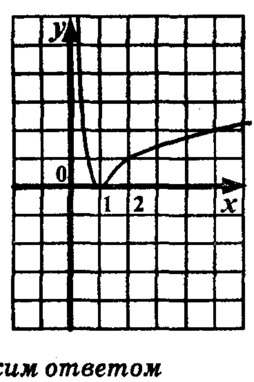
56. На одном из рисунков изображен график функции $y=\log_{\frac{1}{2}} x$.

Укажите этот рисунок.

1)


3)


2)


4)


Задания с кратким ответом

57. Найдите наибольшее значение функции $f(x)=2x\ln x - x\ln 49$ на промежутке $x\in[1;7]$.

58. Найдите все целые значения x, при которых производная функции $f(x)=3x^2\ln x-36x\ln x-7x^3+108x$ равна 0.

59. Найдите наименьшее значение функции

$$f(x)=\left|x^2+2x-3\right|+\frac{3}{2}\ln x$$

на отрезке $\left[\frac{1}{2};\ 4\right]$.

60. Найдите область значений функции

$$f(x)=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2+4x+6\right)+1}\ .$$

Задания с развернутым ответом

61. Найдите все действительные значения параметра b, при каждом из которых уравнение

$$\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2-(b+9)x+2b+14\right)+\log_3\left(2b-18+(2b-19)x-x^2\right)=0$$

имеет единственный корень.

62. Решите уравнение

$$\log_{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}\left(x^2+2x-2\right)=\log_{2+\sqrt{3}}\left(x^2+2x-3\right).$$

63. Найдите все значения x, удовлетворяющие уравнению

$$\log_2\left(a^2x^3-5a^2x^2+\sqrt{6-x}\right)=\log_{a^2+2}\left(3-\sqrt{x-1}\right)$$

при всех значениях параметра a.

64. Решите уравнение

$$\log_2(4x+1)\log_5(4x+4)+\log_3(4x+2)\log_4(4x+3)=$$
$$=2\log_3(4x+2)\log_5(4x+4)$$

65. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$\left|\log_6\frac{x}{36}+\frac{10a+3b+31}{5}x^2-9b^2-9b-1\right|\le$$
$$\le\log_6\frac{36}{x}+\frac{10a+3b+41}{5}x^2-(6b+2)x+9b^2+15b+3$$

имеет хотя бы один корень при любом значении параметра b.

Глава 5.
Тригонометрические выражения и уравнения

§ 1. Тождественные преобразования тригонометрических выражений

Пример 1. Вычислите: $\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right)+\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}$.

1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

2) 1

3) $\frac{-2+\sqrt{2}}{4}$

4) $\frac{2+\sqrt{2}}{4}$

Решение.

Используя нечетность и периодичность функции $y=\sin x$, получим:

$$\sin(-\frac{19\pi}{6})+\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}=-\sin(3\pi+\frac{\pi}{6})+\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}=$$
$$=-\sin(\pi+\frac{\pi}{6})+\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}.$$

Применим формулы приведения и синуса двойного аргумента:

$$-\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)+\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}=\sin\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\left(2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{2+\sqrt{2}}{4}.$$

Номер верного ответа — 4.

Пример 2. Упростите выражение $\frac{\cos 2\alpha}{1+\sqrt{2}\sin\alpha}+\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{2}\cos\alpha}$.

1) $\frac{1}{\sqrt{2}\cos\alpha}$

2) $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha$

3) 1

4) $1-\sqrt{2}\sin\alpha$

Решение. Воспользовавшись формулами косинуса и синуса двойного аргумента, получим

$$\frac{\cos 2\alpha}{1+\sqrt{2}\sin\alpha}+\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{2}\cos\alpha}=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{1+\sqrt{2}\sin\alpha}+\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{2}\cos\alpha}=$$
$$=\frac{1-2\sin^2\alpha}{1+\sqrt{2}\sin\alpha}+\sqrt{2}\sin\alpha\ .$$

Применив для числителя первого слагаемого формулу разности квадратов двух выражений, получим

$$\frac{\left(1-\sqrt{2}\sin\alpha\right)\left(1+\sqrt{2}\sin\alpha\right)}{1+\sqrt{2}\sin\alpha}+\sqrt{2}\sin\alpha=1-\sqrt{2}\sin\alpha+\sqrt{2}\sin\alpha=1\ .$$

Номер верного ответа — 3.

Пример 3. Найдите значение выражения

$$\sin(\alpha+\beta)-2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right) \text{ при } \alpha=\frac{2\pi}{9},\ \beta=\frac{\pi}{18}\ .$$

1) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 2) $-\frac{1}{2}$ 3) $\frac{1}{2}$ 4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Решение.

Используя формулу синуса суммы двух аргументов и нечетность функции $y=\sin x$, а затем формулы приведения, получим:

$$\sin(\alpha+\beta)-2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$-2(-\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha))\cdot\cos(\frac{\pi}{2}+\beta)=$$
$$=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta-2(-\cos\alpha)\cdot(-\sin\beta)=$$
$$=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta-2\cos\alpha\sin\beta=$$
$$=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha-\beta).$$

Если $\alpha=\frac{2\pi}{9}$, $\beta=\frac{\pi}{18}$, то $\sin(\alpha-\beta)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$.

Номер верного ответа — 3.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задания с выбором ответа

1. Вычислите $\sin(-750^\circ)+4\sin 15^\circ\cos 15^\circ$.

1) 0,25 2) 1
3) –0,5 4) 0,5

2. Вычислите $tg(-210°)+\dfrac{1}{\cos(-210°)}$.

1) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 2) 1 3) $-\sqrt{3}$ 4) $\dfrac{1}{2}$

3. Вычислите $\sin\left(-\dfrac{10\pi}{3}\right)+\cos\dfrac{\pi}{6}$.

1) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 2) 0 3) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 4) $\dfrac{2\sqrt{3}}{2}$

4. Найдите значение выражения $\dfrac{1-\cos 4\alpha}{1+\cos 4\alpha}$ при $\alpha=\dfrac{\pi}{8}$.

1) 1 2) –1
3) 0,5 4) $2\sqrt{2}$

5. Найдите значение выражения $\sin\dfrac{3\pi}{7}\sin\dfrac{2\pi}{21}+\cos\dfrac{3\pi}{7}\cos$

1) $\dfrac{1}{2}$ 2) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
3) $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ 4) $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

6. Упростите выражение $\cos 2\alpha + \sin 2\alpha \cdot tg\alpha$.
1) 1 2) $\sin\alpha$
3) $\cos\alpha$ 4) $\sin 2\alpha$

7. Упростите выражение $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2+\sin 2\alpha$.
1) $\sin^2\alpha$ 2) 1
3) $\cos^2\alpha$ 4) $1 + \cos 2\alpha$

8. Упростите выражение $2ctg 2\alpha + tg\alpha$
1) $1+\sin\alpha$ 2) $\dfrac{1}{\cos\alpha}$
3) $ctg\alpha$ 4) 1

9. Найдите значение выражения

$$\cos\left(\alpha-\beta+\frac{\pi}{2}\right)+2\sin(\alpha+\pi)\cos(\beta-\pi)$$

при $\alpha=0{,}1\pi$, $\beta=0{,}15\pi$.

1) 0 2) $\dfrac{1}{2}$
3) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 4) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

10. Найдите значение выражения

$$\cos(3\alpha-5\beta)+2\cos(90^\circ-3\alpha)\cos(5\beta+90^\circ)$$

при $\alpha=12{,}5^\circ$, $\beta=10{,}5^\circ$.

1) 0 2) $\frac{1}{2}$ 3) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 4) 1

Задания с развернутым ответом

Пример 1. Упростите выражение и вычислите его значение при $\alpha=\frac{\pi}{8}$: $\dfrac{\cos(\alpha+\frac{\pi}{2})\sin(3\pi-\alpha)+\sin(\alpha-\frac{3\pi}{2})\cos(2\pi-\alpha)}{2\cos^2\alpha\cdot\mathrm{ctg}(-\frac{\pi}{2}-\alpha)}$.

Решение. Воспользовавшись сначала нечетностью функций $y=\sin x$ и $y=\mathrm{ctg}\,x$, а затем периодичностью функций $y=\sin x$, $y=\cos x$, получим:

$$\frac{\cos(\alpha+\frac{\pi}{2})\sin(3\pi-\alpha)+\sin(\alpha-\frac{3\pi}{2})\cos(2\pi-\alpha)}{2\cos^2\alpha\cdot\mathrm{ctg}(-\frac{\pi}{2}-\alpha)}=$$

$$=\frac{\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)\sin(3\pi-\alpha)-\sin(\frac{3\pi}{2}-\alpha)\cos(2\pi-\alpha)}{-2\cos^2\alpha\cdot\mathrm{ctg}(\frac{\pi}{2}+\alpha)}=$$

$$=\frac{\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)\sin(\pi-\alpha)-\sin(\frac{3\pi}{2}-\alpha)\cos(-\alpha)}{-2\cos^2\alpha\cdot\mathrm{ctg}(\frac{\pi}{2}+\alpha)}.$$

Применяя формулы приведения и свойство четности функции $y=\cos x$, получим:

$$\frac{\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)\sin(\pi-\alpha)-\sin(\frac{3\pi}{2}-\alpha)\cos(-\alpha)}{-2\cos^2\alpha\cdot\mathrm{ctg}(\frac{\pi}{2}+\alpha)}=$$

$$=\frac{-\sin\alpha\sin\alpha+\cos\alpha\cos\alpha}{-2\cos^2\alpha\cdot(-\mathrm{tg}\alpha)}=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{\cos2\alpha}{\sin2\alpha}=\mathrm{ctg}2\alpha.$$

При $\alpha=\frac{\pi}{8}$ имеем $\mathrm{ctg}2\alpha=\mathrm{ctg}\frac{\pi}{4}=1$.

Ответ: 1.

Пример 2. Найдите значение выражения $\dfrac{tg^2\alpha}{(1-tg\alpha)^2(1+tg\alpha)^2}$ при $\alpha=67°30'$.

Р е ш е н и е . Применив свойство степени, формулу квадрата разности двух выражений и формулу тангенса двойного аргумента, получим:

$$\frac{tg^2\alpha}{(1-tg\alpha)^2(1+tg\alpha)^2}=\left(\frac{tg\alpha}{(1-tg\alpha)(1+tg\alpha)}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha}\right)^2=\frac{1}{4}tg^2 2\alpha.$$

При $\alpha = 67°30'$ имеем:

$$\frac{1}{4}tg^2 2\alpha=\frac{1}{4}tg^2 135°=\frac{1}{4}tg^2(90°+45°)=\frac{1}{4}ctg^2 45°=\frac{1}{4}.$$

Ответ: 0,25.

Пример 3. Найдите значение выражения $3\cdot\dfrac{\cos 6\alpha+\cos 2\alpha}{\sin 5\alpha-\sin 3\alpha}$, если $\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$.

Р е ш е н и е . Преобразуем сумму и разность тригонометрических функций в произведение:

$$3\cdot\frac{\cos 6\alpha+\cos 2\alpha}{\sin 5\alpha-\sin 3\alpha}=3\cdot\frac{2\cos\frac{6\alpha+2\alpha}{2}\cos\frac{6\alpha-2\alpha}{2}}{2\sin\frac{5\alpha-3\alpha}{2}\cos\frac{5\alpha+3\alpha}{2}}=3\cdot\frac{\cos 4\alpha\cos 2\alpha}{\sin\alpha\cos 4\alpha}=$$

$$=3\cdot\frac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha}=3\cdot\frac{1-2\sin^2\alpha}{\sin\alpha}.$$

При условии, что $\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$, найдем значение полученного выражения: $3\cdot\dfrac{1-2\sin^2\alpha}{\sin\alpha}=3\cdot\dfrac{1-\frac{2}{9}}{\frac{1}{3}}=7$.

Заметим, что если $\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$, то $\cos 4\alpha\neq 0$.

Действительно,

$$\cos 4\alpha=\cos^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha=2\cos^2 2\alpha-1=$$

$$=2(1-2\sin^2\alpha)^2-1=2\left(1-2\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)^2-1=\frac{17}{81}\neq 0.$$

Следовательно, сокращая дробь на $\cos 4\alpha \neq 0$, мы выполняли тождественное преобразование.

Ответ: 7.

Пример 4. Найдите значение выражения:

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arcctg}\frac{3}{2}+6\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Решение.

Известно, что $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$, тогда $6\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3\pi}{2}$. Применяя формулы приведения и определение $\operatorname{arcctg}\alpha$, получим:

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arcctg}\frac{3}{2}+6\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\operatorname{tg}\left(\operatorname{arcctg}\frac{3}{2}+\frac{3\pi}{2}\right)=$$

$$=-\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arcctg}\frac{3}{2}\right)=-1{,}5$$

Ответ: –1,5.

11. Вычислите значение выражения

$$\frac{\sin(x-\frac{\pi}{2})\cos(y+\frac{3\pi}{2})+\sin(x+\pi)\cos(y-3\pi)}{\sin(x+\frac{\pi}{2})\cos(y-\frac{3\pi}{2})-\sin(x-4\pi)\cos(y+5\pi)}$$

при $x=80°$, $y=35°$.

12. Вычислите: $\dfrac{(\operatorname{tg}81°-\operatorname{tg}21°)^2}{(1+\operatorname{tg}81°\cdot\operatorname{tg}21°)^2}$.

13. Вычислите: $\left(\sin\dfrac{11}{12}\pi+\sin\dfrac{7}{12}\pi\right)^2$.

14. Найдите значение выражения

$$\left(\sin x+\cos x+\sqrt{2}\cos y\right)\left(\sin x+\cos x+\sqrt{2}\cos y\right)$$

при $x=41°$, $y=4°$.

15. Вычислите: $\dfrac{1}{8}\cos 44°+\sin^2 11°\cos^2 11°$.

16. Найдите значение выражения $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-2\arcsin x\right)$ при $x=1$.

§ 2. *Тригонометрические уравнения и их системы*

2.1. ПРОСТЕЙШИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

К простейшим тригонометрическим уравнениям относятся уравнения вида

$$\sin x = a,\ \cos x = a,\ \operatorname{tg} x = a,\ \operatorname{ctg} x = a.$$

Решение таких уравнений удобно оформить в виде таблицы.

Значение параметра	Уравнение	Решение уравнения
$\lvert a\rvert > 1$	$\sin x = a$	корней нет
$\lvert a\rvert \le 1$	$\sin x = a$	$\left[\begin{array}{l} x = \arcsin a + 2\pi k \\ x = \pi - \arcsin a + 2\pi k \end{array}\right. \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$
$\lvert a\rvert > 1$	$\cos x = a$	корней нет
$\lvert a\rvert \le 1$	$\cos x = a$	$\left[\begin{array}{l} x = \arccos a + 2\pi k \\ x = -\arccos a + 2\pi k \end{array}\right. \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x = \pm\arccos a + 2\pi k$
$a \in R$	$\operatorname{tg} x = a$	$x = \operatorname{arctg} a + \pi k$
$a \in R$	$\operatorname{ctg} x = a$	$x = \operatorname{arcctg} a + \pi k$

Запись решения первых двух уравнений в виде совокупности более предпочтительна, т.к. позволяет в случае сложных уравнений произвести отбор найденных решений.

Наиболее часто встречающиеся неотрицательные значения параметра a, такие, что $0 \le a \le 1$ и соответствующие им значения углов удобно свести в таблицу.

Значения параметра a	$a = 0$	$a = \frac{1}{2}$	$a = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$a = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$a = 1$
$\arcsin a$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\arccos a$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

Для значений параметра $-1 \le a < 0$, используются тождества $\arcsin(-a) = -\arcsin a$ и $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$.

Значения параметра a	$a=0$	$a=\frac{\sqrt{3}}{3}$	$a=1$	$a=\sqrt{3}$
$\operatorname{arctg} a$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\operatorname{arcctg} a$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

Для отрицательных значений параметра a используются тождества $\operatorname{arctg}(-a)=-\operatorname{arctg} a$ и $\operatorname{arcctg}(-a)=\pi-\operatorname{arcctg} a$.

Заметим еще, что уравнения вида $\sin^2 x=a^2$ и $\cos^2 x=a^2$ могут быть решены по формулам $\sin^2 x=a^2 \Leftrightarrow x=\pm\arcsin a+\pi k$ и $\cos^2 x=\pm\arccos a+\pi k,\ k\in Z$, если $|a|\le 1$.

Это следует после объединения решений для неотрицательных и отрицательных значений a.

Аналогично

$$\operatorname{tg}^2 x=a^2 \Leftrightarrow x=\pm\operatorname{arctg} a+\pi k$$

и

$$\operatorname{ctg}^2 x=a^2 \Leftrightarrow x=\pm\operatorname{arcctg} a+\pi k,\ k\in Z.$$

К простейшим тригонометрическим уравнениям можно отнести также уравнения вида $\sin x=\sin y$, $\cos x=\cos y$, $\operatorname{tg} x=\operatorname{tg} y$, $\operatorname{ctg} x=\operatorname{ctg} y$.

Получим формулы решения подобных уравнений, используя формулы преобразования разности одноименных тригонометрических функций.

Уравнение, имеющее вид равенства синусов двух углов, можно решить следующим образом:

$$\sin x=\sin y \Leftrightarrow \sin x-\sin y=0 \Leftrightarrow 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\frac{x-y}{2}=0\\ \cos\frac{x+y}{2}=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{x-y}{2}=\pi n\\ \frac{x+y}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi n\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-y=2\pi n\\ x+y=\pi+2\pi n,\quad n\in Z\end{array}\right.$$

Второе простейшее уравнение имеет вид равенства косинусов двух углов. Получим:

$$\cos x=\cos y \Leftrightarrow -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+y=2\pi n\\ x-y=2\pi n\end{array}\right., n\in Z.$$

Третье уравнение – это уравнение вида $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y$.

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y \Leftrightarrow \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cdot \cos y} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = \pi n, \\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n \end{cases}, \ n \in Z$$

Наконец, последнее уравнение — уравнение $\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} y$.

$$\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} y \Leftrightarrow \frac{-\sin(x-y)}{\sin x \cdot \sin y} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = \pi n, \\ x \neq \pi n, \end{cases} \ n \in Z$$

Полученные результаты можно представить в таблице.

$\sin x = \sin y \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y + 2\pi n \\ x = -y + \pi(1+2n) \end{array}\right., n \in Z$
$\cos x = \cos y \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y + 2\pi n \\ x = -y + 2\pi n \end{array}\right., n \in Z$
$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + \pi n, \\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n \end{cases}, n \in Z$
$\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} y \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + \pi n, \\ x \neq \pi n, \end{cases} n \in Z$

Очевидно, что из полученных формул следует решение других простейших уравнений.

Пример 1. Решите уравнение $\sin x = \frac{1}{2}$.

Решение.

Применим формулу решения простейшего уравнения:

$$\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2} + \pi n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$$

Ответ: $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$.

Пример 2. Решите уравнение $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Р е ш е н и е.

$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \pi n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbf{Z}.$$

Ответ: $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$.

Пример 3. Решите уравнение $\cos x = 1$.

Р е ш е н и е: $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$.

Ответ: $2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Пример 4. Решите уравнение $\operatorname{tg} x = -1$.

Р е ш е н и е.

$$\operatorname{tg} x = -1 \Leftrightarrow x = \operatorname{arctg}(-1) + \pi n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$$

Ответ: $-\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$.

2.2. ПРИЕМЫ РЕШЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1. Решение уравнений методом разложения на множители.

Пример 5. Решите уравнение $2\cos^2 7x - \cos 7x = 0$.

Р е ш е н и е.

$$2\cos^2 7x - \cos 7x = 0 \Leftrightarrow \cos 7x(2\cos 7x - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 7x = 0 \\ \cos 7x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 7x = \frac{\pi}{2} + \pi n \\ 7x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{14} + \frac{\pi}{7}n \\ x = \pm\frac{\pi}{21} + \frac{2\pi}{7}n, \end{array}\right. \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{14} + \frac{\pi}{7}n; \pm\frac{\pi}{21} + \frac{2\pi}{7}n, n \in \mathbf{Z}$.

Пример 6. Решите уравнение $1+\sin x\ \cos 2x=\sin x+\cos 2x$.

Решение.

Сгруппируем слагаемые и разложим на множители:

$$1+\sin x\ \cos 2x=\sin x+\cos 2x \Leftrightarrow 1-\cos 2x+\sin x(1-\cos 2x)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1+\sin x)(1-\cos 2x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=-1\\ \cos 2x=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k\\ x=\pi k,\end{array}\right. ,k\in Z.$$

Ответ: $-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ \pi k,\ k\in Z$.

Пример 7. Решите уравнение $2\cos x\cos 2x=\cos x$.

Решение.

$$2\cos x\cos 2x=\cos x \Leftrightarrow \cos x(2\cos 2x-1)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \cos 2x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k\\ x=\pm\dfrac{\pi}{6}+\pi k\end{array}\right. ,\ k\in Z.$$

2. Решение тригонометрических уравнений, сводящихся к решению вспомогательного целого алгебраического уравнения.

Пример 8. Решите уравнение $3\cos^2 x-10\cos x+3=0$.

Решение. Сделав замену $y=\cos x$, решим полученное квадратное уравнение:

$$3y^2-10y+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=\dfrac{5+4}{3}\\ y=\dfrac{5-4}{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=3\\ y=\dfrac{1}{3}.\end{array}\right.$$

Выполняя обратную замену, получим, что уравнение

$$3\cos^2 x-10\cos x+3=0$$

равносильно совокупности простейших уравнений:

$$3\cos^2 x-10\cos x+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=3\\ \cos x=\dfrac{1}{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \cos x=\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\pm\arccos\dfrac{1}{3}+2\pi k,\ k\in Z.$$

Ответ: $\pm\arccos\dfrac{1}{3}+2\pi k,\ k\in Z$.

Пример 9. Решите уравнение

$$\cos 2x + 3\sqrt{2}\sin x - 3 = 0\ .$$

Р е ш е н и е :

Используя формулу косинуса двойного аргумента, преобразуем данное уравнение:

$$\cos 2x + 3\sqrt{2}\sin x - 3 = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x + 3\sqrt{2}\sin x - 3 = 0.$$

Выполнив замену $y = \sin x$, решим полученное уравнение:

$$2y^2 - 3\sqrt{2}y + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{2}}{4} \\ y = \dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{2}}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \sqrt{2} \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{array}\right.$$

Таким образом:

$$2\sin^2 x - 3\sqrt{2}\sin x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \sqrt{2} \\ \sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n \ \Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$$

Ответ: $(-1)^n \dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

Пример 10. Решите уравнение

$$\sin^3 x - 37\cos^3 x + \cos x = 0\ .$$

Р е ш е н и е .

Данное уравнение будет равносильно совокупности:

$$\sin^3 x - 37\cos^3 x + \cos x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} \cos x = 0, \\ \sin x = 0 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} \cos x \neq 0, \\ \operatorname{tg}^3 x - 37 + \dfrac{1}{\cos^2 x} = 0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}^3 x - 37 + \left(1 + \operatorname{tg}^2 x\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x - 36 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\operatorname{tg} x = 3 \Leftrightarrow x = \operatorname{arctg} 3 + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

Примечание. Решение получившегося кубического уравнения было произведено методом группировки и разложения на множители:

$$y^3+y^2-36=0 \Leftrightarrow y^3-27+y^2-9=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (y-3)(y^2+3y+9)+(y-3)(y+3)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (y-3)(y^2+3y+12)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y-3=0 \\ y^2+3y+12=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow y=3.$$

Ответ: $\operatorname{arctg}3+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

3. Решение уравнений с применением формул преобразования произведения тригонометрических функций в сумму или разность.

Пример 11. Решите уравнение $2\cos x\sin 3x=\sin 4x+1$.

Решение.

$$2\cos x\sin 3x=\sin 4x+1 \Leftrightarrow \sin 4x-\sin 2x=\sin 4x+1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x=-1 \Leftrightarrow 2x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

Пример 12. Решите уравнение $1+2\cos 3x\cos x-\cos 2x=0$.

Решение.

Применяя формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму, получим:

$$1+2\cos 3x\cos x-\cos 2x=0 \Leftrightarrow 1+\cos 4x+\cos 2x-\cos 2x=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos 4x=-1 \Leftrightarrow 4x=\pi+2\pi n \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2},\ n\in\mathbf{Z}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n,\ n\in\mathbf{Z}$.

4. Решение уравнений с применением формул преобразования суммы и разности тригонометрических функций в произведение.

Пример 13. Решите уравнение $\sin 3x+\sin x=\sin 2x$.

Решение.

Выполним преобразование левой части уравнения:

$$\sin 3x+\sin x=\sin 2x \Leftrightarrow 2\sin 2x\cos x-\sin 2x=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x(2\cos x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2x=0\\ \cos x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}n\\ x=\pm\arccos\dfrac{1}{2}+2\pi n\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}n\\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi n,\end{array}\right. \quad n\in\mathbf{Z}.$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{2}n, \pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi n, \quad n\in\mathbf{Z}$.

Пример 14. Решите уравнение

$$\cos 2x-\cos 8x+\cos 6x=1.$$

Р е ш е н и е .

$$\cos 2x-\cos 8x+\cos 6x=1 \Leftrightarrow 2\cos 4x\cos 2x=1+\cos 8x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 4x\cos 2x=2\cos^2 4x \Leftrightarrow \cos 4x(\cos 4x-\cos 2x)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2\cos 4x\sin 3x\sin x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 4x=0\\ \sin 3x=0\\ \sin x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n\\ 3x=\pi n\\ x=\pi n\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi}{4}n\\ x=\dfrac{\pi}{3}n,\end{array}\right. \quad n\in\mathbf{Z}.$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi}{4}n; \dfrac{\pi}{3}n, \quad n\in\mathbf{Z}$.

5. Введение дополнительного аргумента.

При решении задач, содержащих линейную комбинацию тригонометрических функций $\sin x$ и $\cos x$, обычно выполняют следующее преобразование:

$$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi), \quad \varphi=\operatorname{arctg}\frac{b}{a}.$$

Замечания.

1. В зависимости от условий применения данной формулы дополнительный аргумент может быть определен также как $\varphi=\arccos\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ или $\varphi=\arcsin\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

2. Данная формула может быть представлена также в виде:

$$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\varphi),\ \varphi=\operatorname{arctg}\frac{a}{b}.$$

Пример 15. Решите уравнение

$$\sin x+\cos x=\sqrt{2}.$$

Решение.

$$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\Leftrightarrow\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)=\sqrt{2}\Leftrightarrow$$

$$\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\sin\frac{\pi}{4}=1\Leftrightarrow\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+2\pi n\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

Пример 16. Решите уравнение

$$\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x=\sqrt{3}.$$

Решение.

$$\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x=\sqrt{3}\Leftrightarrow 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x\right)=\sqrt{3}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow 2x-\frac{\pi}{6}=(-1)^n\frac{\pi}{3}+\pi n\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{12}+(-1)^n\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}n,n\in\mathbf{Z}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{12}+(-1)^n\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}n,\ n\in\mathbf{Z}$.

Пример 17. Решите уравнение

$$\sin 3x-2\sin 18x\sin x=3\sqrt{2}-\cos 3x+2\cos x.$$

Решение.

$$\sin 3x-2\sin 18x\sin x=3\sqrt{2}-\cos 3x+2\cos x.$$

Запишем данное уравнение следующим образом:

$$(\sin 3x+\cos 3x)-2(\sin 18x\sin x+\cos x)=3\sqrt{2}.$$

Обозначим $\sin 18x = a$. В этом случае уравнение приобретет вполне узнаваемый вид

$$\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 3x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos 3x\right) -$$
$$-2\sqrt{1+a^2}\left(\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\cos x\right) = 3\sqrt{2},$$

легко упрощающийся введением дополнительного аргумента.

Получим: $\sqrt{2}\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right) - 2\sqrt{1+a^2}\sin(x+\varphi) = 3\sqrt{2}$.

Так как $a = \sin 18x$, то $2\sqrt{1+a^2} \le 2\sqrt{2}$. Поэтому выражение, стоящее в левой части уравнения может быть равным $3\sqrt{2}$ при выполнении условия: $\begin{cases} \sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right) = 1, \\ \sin(x+\varphi) = -1, \\ \sin^2 18x = 1. \end{cases}$

Рассмотрим случай, когда $\sin 18x = 1$. Система приобретет вид

$$\begin{cases} \sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right) = 1, \\ \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = -1, \\ \sin 18x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ x+\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ 18x = \frac{\pi}{2} + 2\pi l \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}n, \\ x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \\ x = \frac{\pi}{36} + \frac{\pi}{18}l, \end{cases}$$

где $n, k, l \in Z$. Для нахождения решения данной системы достаточно проверить, будет ли решение второго уравнения удовлетворять другим уравнениям системы. Подстановкой, получаем систему:

$$\begin{cases} x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \\ \sin\left(-\frac{9\pi}{4} + 6\pi n + \frac{\pi}{4}\right) = 1, \\ \sin\left(18\left(-\frac{3\pi}{4} + 2\pi l\right)\right) = 1. \end{cases}$$

Очевидно, что второе уравнение неверно, т.к. $\sin(-2\pi) = 0$, поэтому в данном случае система несовместна.

Пусть теперь $\sin 18x = -1$. В этом случае получим:

$$\begin{cases}\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)=1,\\ \sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=1,\\ \sin 18x=-1.\end{cases}$$

Решим второе уравнение

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1 \Leftrightarrow x=\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbf{Z}.$$

Подставляя найденные корни в остальные уравнения, получим:

$$\sin\left(\frac{9\pi}{4}+6\pi k+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1 \text{ и } \sin\left(18\left(\frac{3\pi}{4}+2\pi k\right)\right)=\sin\frac{3\pi}{2}=-1.$$

Следовательно, система совместна.

Ответ: $\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbf{Z}$.

6. Решение различных видов уравнений.

Рассмотрим уравнения, при решении которых будут применены различные приемы.

Пример 18. Решите уравнение $\sin 3x = \sin x$.

Решение.

$$\sin 3x=\sin x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3x-x=2\pi n\\ 3x+x=\pi+2\pi n\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pi n\\ x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}n\end{array}\right.\ n\in\mathbf{Z}.$$

Ответ: $\pi n,\ \dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}n,\ n\in\mathbf{Z}$.

Пример 19. При всех значениях параметра a решите уравнение

$$\sin(x-a)=\sin x+\sin a.$$

Решение.

$$\sin(x-a)=\sin x+\sin a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x-a}{2}=2\sin\frac{x+a}{2}\cos\frac{x-a}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos\dfrac{x-a}{2}=0\\ \sin\dfrac{x-a}{2}=\sin\dfrac{x+a}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{x-a}{2}=\dfrac{\pi}{2}+\pi k\\ a=2\pi n\\ x=\pi+2\pi l\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a+\pi+2\pi k\\ x=\pi+2\pi l\\ a=2\pi n.\end{array}\right.$$

Осталось дать правильную трактовку полученной совокупности.

Ответ: при $a = 2\pi n$, $x \in \mathbf{Z}$,

при $a \neq 2\pi n$, $\pi + 2\pi k$, $a + \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Пример 20. Решите уравнение $\sqrt{12\sin x+13}=3\sin x+2$.

Решение.

$$\sqrt{12\sin x+13}=3\sin x+2\Leftrightarrow\begin{cases}3\sin x+2\geq 0,\\ 12\sin x+13=9\sin^2 x+12\sin x+4\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3\sin x+2\geq 0,\\ \sin^2 x=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3\sin x+2\geq 0,\\ \left[\begin{array}{l}\sin x=-1\\ \sin x=1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\sin x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$.

Пример 21. Решите систему

$$\begin{cases}|x+2|-2\leq x,\\ \left(2^{x+1}+2^{x-1}+2^{1-x}\right)\sin\dfrac{\pi x}{2}+\cos\pi x=3+2^{2x-1}.\end{cases}$$

Решение.

Рассмотрим условия этой системы.

1) $|x+2|-2\leq x\Leftrightarrow|x+2|\leq x+2\Leftrightarrow x+2\geq 0$.

2) $\left(2^{x+1}+2^{x-1}+2^{1-x}\right)\sin\dfrac{\pi x}{2}+\cos\pi x=3+2^{2x-1}$

$$\Leftrightarrow\left(5\cdot 2^{x-1}+2^{1-x}\right)\sin\frac{\pi x}{2}+1-2\sin^2\frac{\pi x}{2}=3+2^{2x-1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2\frac{\pi x}{2}-(5\cdot 2^{x-1}+2^{1-x})\sin\frac{\pi x}{2}+2^{2x-1}+2=0.$$

Вычислим дискриминант получившегося квадратного тригонометрического уравнения.

$$D=\left(5\cdot 2^{x-1}+2^{1-x}\right)-8\left(2^{2x-1}+2\right)=9\cdot 2^{2x-2}-6+2^{1-x}=\left(3\ 2^{x-1}-2^{1-x}\right)^2.$$

Таким образом, уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \sin\dfrac{\pi x}{2}=2^x \\ \sin\dfrac{\pi x}{2}=\dfrac{2^{x-1}+2^{1-x}}{2}. \end{array}\right.$$

Поскольку $x \geq -2$, первое уравнение системы решений не имеет, т.к. при $-2 \leq x \leq 0$ левая часть уравнения неположительная, а правая – положительная. При $x>0$ $2^x>1$, поэтому и здесь решений нет.

Во втором уравнении по неравенству Евклида получим, что: $2^{1+x}+2^{1-x} \geq 2$. Поэтому правая часть второго уравнения системы больше единицы при любом значении $x \neq 1$. Таким образом, если данное уравнение, а вместе с ним система, имеет решение, то этим решением может быть только $x=1$. Подстановкой убеждаемся, что это действительно так.

Ответ: 1.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задания с выбором ответа

17. Решите уравнение $\sin 2x=\dfrac{1}{2}$.

1) $\pm\dfrac{\pi}{12}+\pi n$
2) $(-1)^n\dfrac{\pi}{12}+\pi n$
3) $(-1)^n\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi}{2}n$
4) $\dfrac{\pi}{12}+\pi n$

18. Решите уравнение $\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)=0$.

1) $\pm\dfrac{\pi}{12}+\pi n$
2) $\dfrac{\pi}{12}+\pi n$
3) $\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi}{2}n$
4) $\dfrac{\pi}{12}+\pi n$

19. Решите уравнение $2\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)+\sqrt{3}=0$.

1) $\dfrac{\pi}{12}+(-1)^n\dfrac{\pi}{9}+\dfrac{\pi}{3}n$
2) $\dfrac{\pi}{12}-(-1)^n\dfrac{\pi}{9}+\dfrac{\pi}{3}n$

3) $-\frac{\pi}{36}+\frac{\pi}{3}n$ 4) $\frac{7\pi}{36}+\frac{\pi}{3}n$

20. Решите уравнение $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

1) $-\frac{5\pi}{12}+\pi n$ 2) $\frac{\pi}{12}+\pi n$

3) $-\frac{7\pi}{12}+\pi n$ 4) $\frac{5\pi}{12}+\pi n$

21. Решите уравнение $\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2}\right)=-1$.

1) $-\frac{\pi}{2}+\pi n$ 2) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$

3) $\frac{\pi}{2}+\pi n$ 4) $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$

Задания с кратким ответом

22. Найдите наименьшее положительное решение уравнения $\sin 2x+4\cos x-\frac{1}{2}\sin x=1$.

23. Найдите корень уравнения $3\sin x\cos x+2\cos^2 x=0$, принадлежащий интервалу $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

24. Найдите сумму корней уравнения $\sin 3x=\cos 5x$, принадлежащих интервалу $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

25. Найдите наибольшее отрицательное решение уравнения

$$\operatorname{ctg} x-\operatorname{tg} x=\frac{2\sqrt{3}\cos 2x}{1+\cos 2x}.$$

26. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения

$$5\sin 2x-5\cos 2x=\operatorname{tg} x-5.$$

Задания с развернутым ответом

27. Решите уравнение $4\cos^2 x-4\cos x\cos^2 3x+\cos^2 3x=0$.

28. Решите уравнение $7\sin x+6\sin 3x+5\sin 5x+4\sin 7x=0$.

29. Решите уравнение $8\operatorname{tg}8x+4\operatorname{tg}4x+2\operatorname{tg}2x+\operatorname{tg}x=16+\operatorname{ctg}x$.

30. Решите уравнение $5\sin^5 x-3\cos^3 x=5$.

31. При каких значениях параметра a уравнение $\cos ax=2-\cos x$ имеет конечное число решений.

2.3. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ, ПРИВОДИМЫХ К НИМ

Основные методы решения систем тригонометрических уравнений те же, что и алгебраических систем: исключение неизвестных, замена переменной и т.д. Однако в отличие от них каждое уравнение тригонометрической системы обычно имеет бесконечное множество решений, что приводит к необходимости отбора серий корней или частей этих серий. При этом возникает необходимость решать линейные неопределенные уравнения первой степени с двумя неизвестными.

Определение. Линейным неопределенным уравнением первой степени с двумя неизвестными называется уравнение вида $ax+by=c$, где a, b, c — произвольные целочисленные пара-метры.

Для нахождения целочисленных решений данного уравнения, прежде всего надо найти НОД $(a,\ b)$ и проверить, делится ли на него число c. Если число c не делится, то подобное уравнение не имеет целочисленных решений.

Если же c делится на НОД $(a,\ b)$, то сократив на него обе части уравнения, получим новое уравнение с взаимно простыми коэффициентами в левой части. Оказывается, что любое такое уравнение всегда будет иметь бесконечно много целочисленных решений.

Необходимость решения целочисленных неопределенных уравнений постоянно возникает при решении тригонометрических уравнений и систем.

Пример 1. Решите уравнение $\sin 3x-2\cos 2x=3$.

Р е ш е н и е.

В силу ограниченности тригонометрических функций, стоящих в левой части уравнения, получим:

$$\sin 3x-2\cos 2x=3 \Leftrightarrow \begin{cases}\sin 3x=1,\\ \cos 2x=-1,\end{cases}$$

т.к. $|\sin 3x|\le 1$, $|\cos 2x|\le 1$.

Поэтому решениями уравнения будут служить решения тригонометрической системы:

$$\begin{cases} \sin 3x = 1, \\ \cos 2x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z, \\ 2x = \pi + 2\pi n, n \in Z. \end{cases}$$

Очень важно помнить, что использовать один целочисленный параметр для записи решения системы тригонометрических уравнений нельзя, т.к. предстоит еще нахождение общего решения:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\pi}{3} k, \\ x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \end{cases} k, n \in Z.$$

Выясним, имеются ли общие решения уравнений системы, т.е. существуют ли целые значения k и n, при которых выполняется условие

$$\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} k = \frac{\pi}{2} + \pi n.$$

Имеем:

$$\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} k = \frac{\pi}{2} + \pi n \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1 + 4k = 3 + 6n \Leftrightarrow 4k - 6n = 2.$$

Так как НОД $(4,6) = 2$, то данное неопределенное уравнение будет иметь решения. Сократив на 2, получим:

$$2k = 3n + 1 \Leftrightarrow k = n + \frac{n+1}{2}.$$

Для того чтобы k было целым, n должно быть нечетным, т.е. уравнение имеет решение, если $n = 2m - 1$, и в этом случае

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi(2m - 1) = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in Z.$$

Ответ: $-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in Z$.

Тригонометрические системы могут быть и смешанными, что обычно возникает при отборе корней какого-либо уравнения.

Пример 2. Решите уравнение $\frac{\sin 3x}{\cos 6x}=0$.

Решение.

$$\frac{\sin 3x}{\cos 6x}=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\sin 3x=0,\\ \cos 6x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{\pi}{3}k,\\ x\neq\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6}n,\end{cases} k,\ n\in Z.$$

В данном случае решением исходного уравнения будут являться решения первого уравнения, удовлетворяющие неравенству системы. Найдем, для каких целых чисел k число $\frac{\pi}{3}k$ окажется посторонним корнем. Для этого должно выполняться равенство: $\frac{\pi}{3}k=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6}n \Leftrightarrow 4k=1+2n$. Так как НОД $(4,2)=2$, то данное уравнение решений не имеет, а, следовательно, первое уравнение системы не имеет посторонних корней.

Ответ: $\frac{\pi}{3}k,\ k\in Z$.

Пример 3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\sin x\cos y=\frac{1}{2},\\ \sin y\cos x=\frac{1}{2}\end{cases}.$$

Решение.

Складывая уравнения и вычитая их друг из друга, получим:

$$\begin{cases}\sin x\cos y=\frac{1}{2},\\ \sin y\cos x=\frac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin(x+y)=1,\\ \sin(x-y)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+y=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\\ x-y=\pi n,\end{cases} k,n\in Z.$$

Вновь складывая и вычитая уравнения, находим, что

$$\begin{cases}2x=\frac{\pi}{2}+\pi(2k+n),\\ 2y=\frac{\pi}{2}+\pi(2k-n)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}(2k+n),\\ y=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}(2k-n),\end{cases} k,n\in Z.$$

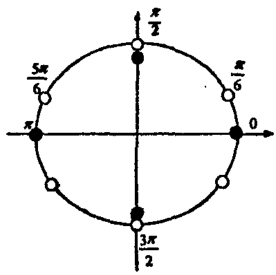
Ответ: $\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}(2k+n);\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}(2k-n)\right),\ (k,n\in Z)$.

Кроме рассмотрения неопределенного уравнения с целью отбора решения тригонометрического уравнения или системы уравнений, традиционно применяется отбор чисел на единичной окружности.

Пример 4. Решите уравнение $\frac{\sin 2x}{\cos 3x}=0$.

Решение.

$$\frac{\sin 2x}{\cos 3x}=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\sin 2x=0,\\ \cos 3x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{\pi}{2}k,\\ x\neq\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}n,\end{cases} k,n\in Z.$$



Итак, нам нужно из множества чисел x, представимых в виде $\frac{\pi}{2}k, k\in Z$, исключить посторонние корни, т.е. числа вида $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}n, n\in Z$. Для этого изобразим данные числа на единичной окружности.

Закрашенными точками изображены числа вида $\frac{\pi}{2}k, k\in Z$, а не закрашенными — числа вида $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}n, n\in Z$. Иными словами, решения уравнения — числа, которым на тригонометрическом круге соответствуют черные (закрашенные) кружки, не совпадающие с белыми. Такие числа образуют две последовательности, которые могут быть объединены в одну: $x=\pi m, m\in Z$.

Ответ: $\pi m, m\in Z$.

Однако из-за неоднозначности соответствия точек числовой прямой и точек единичной окружности, в этом методе может возникать визуальное совпадение чисел, которого на самом деле нет.

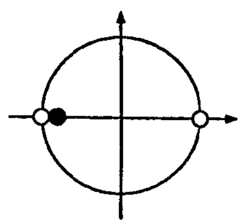
Пример 5. Решите уравнение

$$\frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{3}\right)}=0.$$

Р е ш е н и е.

$$\frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{3}\right)}=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\cos\frac{x}{2}=0,\\ \sin\frac{x}{3}\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\pi+2\pi k,\\ x\neq 3\pi n,\end{cases} k,n\in Z.$$

Попробуем провести отбор корней, используя единичную окружность. Изобразим подобно предыдущему примеру числа вида $\pi+2\pi k$ и $3\pi n$ на единичной окружности.



На основании рисунка можно заключить, что данное уравнение решений не имеет, т.к. единственная закрашенная точка, отвечающая числам вида $\pi+2\pi k$, визуально совпадает с не закрашенной точкой, отвечающей числам вида $3\pi n$. Однако легко видеть, что, например, числа π и 5π являются решениями этого уравнения.

Поэтому вернемся к отбору корней методом решения неопределенного уравнения. Имеем:

$$\pi+2\pi k=3\pi n \Leftrightarrow k=\frac{3n-1}{2} \Leftrightarrow k=n+\frac{n-1}{2}.$$

Отсюда следует, что при нечетных $n=2m+1$ получим $k=3m+1$.

Таким образом, при $k=3m+1$ получаются посторонние корни. Следовательно, если $k=3m$ или $k=3m+2$, то числа

$$x=\pi+6\pi m,\ x=5\pi+6\pi m, m\in Z$$

являются решениями уравнения.

Ответ: $\pi+6\pi m,\ 5\pi+6\pi m, m\in Z$.

Пример 6. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{2}\sin x+\cos y=1,\\ 2\sin x-3\cos y=\sqrt{2}.\end{cases}$$

Решение.

Данная система уравнений есть линейная система уравнений относительно $\sin x$ и $\cos y$. Поэтому, применяя метод Крамера решения подобных систем, получим:

$$D=\begin{vmatrix}\sqrt{2} & 1\\ 2 & -3\end{vmatrix}=-2-3\sqrt{2},\ D_{\sin x}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ \sqrt{2} & -3\end{vmatrix}=-3-\sqrt{2},$$

$$D_{\cos y}=\begin{vmatrix}\sqrt{2} & 1\\ 2 & \sqrt{2}\end{vmatrix}=0.$$

Применяя формулы Крамера, получим, что

$$\begin{cases}\sin x=\dfrac{1}{\sqrt{2}},\\ \cos y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=(-1)^k\dfrac{\pi}{4}+\pi k,\\ y=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\end{cases} k,n\in Z.$$

Ответ: $\left((-1)^k\dfrac{\pi}{4}+\pi k;\dfrac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $(k,n\in Z)$.

Пример 7. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\operatorname{tg} x+\dfrac{1}{\cos y}=2\sqrt[3]{34},\\ \dfrac{\operatorname{tg} x}{\cos y}=\sqrt[3]{34^2}-5.\end{cases}$$

Решение.

Пусть $(x_0;y_0)$ какое-либо решение системы.

Тогда $\left(\operatorname{tg} x_0;\dfrac{1}{\cos y_0}\right)$ — корни квадратного уравнения вида

$$t^2-2\sqrt[3]{34}t+\sqrt[3]{34^2}-5=0.$$

Дискриминант этого уравнения равен 20, поэтому

$$\left[\begin{array}{l}t=\sqrt[3]{34}-\sqrt{5}\\ t=\sqrt[3]{34}+\sqrt{5}.\end{array}\right.$$

Получим, что исходная система уравнений равносильна следующей совокупности

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\operatorname{tg} x=\sqrt[3]{34}-\sqrt{5},\\ \cos y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{34}+\sqrt{5}}\end{cases}\\ \begin{cases}\operatorname{tg} x=\sqrt[3]{34}+\sqrt{5},\\ \cos y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{34}-\sqrt{5}}.\end{cases}\end{array}\right.$$

Если наличие решения первой системы совокупности не вызывает сомнений, то во второй системе необходимо сравнить модуль числа, стоящего в правой части второго уравнения с числом 1.

$3<\sqrt[3]{34}<4$, а $2<\sqrt{5}<3$, поэтому $\sqrt[3]{34}-\sqrt{5}>0$.

Проведем сравнение:

$$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{34}-\sqrt{5}}\vee 1\right)\Leftrightarrow\left(1\vee\sqrt[3]{34}-\sqrt{5}\right)\Leftrightarrow\left(1+\sqrt{5}\vee\sqrt[3]{34}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(16+8\sqrt{5}\vee 34\right)\Leftrightarrow\left(4\sqrt{5}\vee 9\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(80<81)\Leftrightarrow\left(\frac{1}{\sqrt[3]{34}-\sqrt{5}}<1\right).$$

Таким образом, второе уравнение второй системы также имеет решение.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}tg\, x=\sqrt[3]{34}-\sqrt{5},\\ \cos y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{34}+\sqrt{5}}\end{cases}\\ \begin{cases}tg\, x=\sqrt[3]{34}+\sqrt{5},\\ \cos y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{34}-\sqrt{5}}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=arctg\left(\sqrt[3]{34}-\sqrt{5}\right)+\pi k,\\ y=\pm\arccos\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{34}+\sqrt{5}}\right)+2\pi n\end{cases}\\ \begin{cases}x=arctg\left(\sqrt[3]{34}+\sqrt{5}\right)+\pi k,\\ y=\pm\arccos\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{34}-\sqrt{5}}\right)+2\pi n,\end{cases}\end{array}\right.\quad k,n\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left(\operatorname{arctg}\left(\sqrt[3]{34}-\sqrt{5}\right)+\pi k;\ \pm\arccos\dfrac{1}{\sqrt[3]{34}+\sqrt{5}}+2\pi n\right)$;

$\left(\operatorname{arctg}\left(\sqrt[3]{34}+\sqrt{5}\right)+\pi k;\ \pm\arccos\dfrac{1}{\sqrt[3]{34}-\sqrt{5}}+2\pi n\right)$, $(k,n\in\mathbb{Z})$.

Пример 8. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x\sin^2\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=y\cos^2\left(y+\dfrac{\pi}{6}\right), \\ x\cos^2\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=y\sin^2\left(y+\dfrac{\pi}{6}\right). \end{cases}$$

Р е ш е н и е.

Заменяя уравнения системы их суммой и разностью, получим

$$\begin{cases} x\sin^2\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=y\cos^2\left(y+\dfrac{\pi}{6}\right), \\ x\cos^2\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=y\sin^2\left(y+\dfrac{\pi}{6}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y, \\ x\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)=-y\cos\left(2y+\dfrac{\pi}{3}\right) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y, \\ x\left(\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)+\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y, \\ 2x\cos\dfrac{\pi}{3}\cos 2x=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=y, \\ x=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x=y, \\ \cos 2x=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0, \\ y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}k, k\in Z. \\ y=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}k \end{cases} \end{array}\right.$$

Заметим, что в данном случае при записи второго решения системы должен быть использован один параметр $k\in Z$, т.к. в данном случае решения системы связаны условием их равенства.

Ответ: $(0;0)$; $\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}k; \dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}k\right)$, $k\in Z$.

Пример 9. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 6\cos x+4\cos y=5, \\ 3\sin x+2\sin y=0 \end{cases}.$$

Р е ш е н и е.

$$\begin{cases} 6\cos x+4\cos y=5, \\ 3\sin x+2\sin y=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6\cos x=5-4\cos y, \\ 6\sin x=-4\sin y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x > 0, \\ \sin x = -\dfrac{2}{3}\sin y, \\ 36 = 16\sin^2 y + (5-4\cos y)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x > 0, \\ \sin x \sin y < 0, \\ 6\cos x = 5 - 4\cos y, \\ 40\cos y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \sin y < 0, \\ \cos y = \dfrac{1}{8}, \\ \cos x = \dfrac{3}{4}. \end{cases}$$

Условие $\sin x \sin y < 0$ дает возможность правильного отбора серий решений данной системы.

$$\begin{cases} \sin x \sin y < 0, \\ \cos x = \dfrac{3}{4}, \\ \cos y = \dfrac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \arccos\dfrac{3}{4} + 2\pi k, \\ y = -\arccos\dfrac{1}{8} + 2\pi n \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\arccos\dfrac{3}{4} + 2\pi k, \\ y = \arccos\dfrac{1}{8} + 2\pi n, \end{cases} \end{array} \right. k, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left(\arccos\dfrac{3}{4} + 2\pi k; -\arccos\dfrac{1}{8} + 2\pi n\right)$;

$\left(-\arccos\dfrac{3}{4} + 2\pi k; \arccos\dfrac{1}{8} + 2\pi n\right), (k, n \in \mathbb{Z})$.

Пример 10. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 4\operatorname{tg} 3x = 3\operatorname{tg} 2y, \\ 2\sin x \cos(x-y) = \sin y \end{cases}.$$

Р е ш е н и е .

$$\begin{cases} 4\operatorname{tg} 3x = 3\operatorname{tg} 2y, \\ 2\sin x \cos(x-y) = \sin y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\operatorname{tg} 3x = 3\operatorname{tg} 2y, \\ 2\sin x \cos(x-y) - \sin y = 0 \end{cases}.$$

Преобразуем выражение, стоящее в левой части второго уравнения.

$$2\sin x\cos(x-y)-\sin y=2\sin x\cos x\cos y+2\sin^2 x\sin y-\sin y=$$
$$=\sin 2x\cos y-\sin y\left(1-2\sin^2 x\right)=\sin 2x\cos y-\cos 2x\sin y=$$
$$=\sin(2x-y)$$

Таким образом, система запишется в виде

$$\begin{cases}4\operatorname{tg}3x=3\operatorname{tg}2y,\\ \sin(2x-y)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y-2x=\pi k,\\ 4\operatorname{tg}3x=3\operatorname{tg}2y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2x+\pi k, k\in Z\\ 4\operatorname{tg}3x=3\operatorname{tg}4x.\end{cases}$$

Решим второе уравнение системы. $4\operatorname{tg}3x=3\operatorname{tg}4x$.

Для решения нам потребуются формулы тангенсов кратных углов.

Обратимся к замечательной формуле – формуле Муавра

$$\cos n\varphi+i\sin n\varphi=(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n,\ n\in N.$$

Действительная часть выражения равна косинусу, а мнимая часть — синусу соответствующего кратного угла. Следовательно, тангенс есть их отношение. Получим, что

$$\sin 3x=3\sin x\cos^2 x-\sin^3 x,\ \cos 3x=\cos^3 x-3\sin^2 x\cos x,$$

откуда $\operatorname{tg}3x=\dfrac{3\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}^3x}{1-3\operatorname{tg}^2x}$.

Аналогично получим, что $\operatorname{tg}4x=\dfrac{4\operatorname{tg}x-4\operatorname{tg}^3x}{1-6\operatorname{tg}^2x+\operatorname{tg}^4x}$.

Следовательно, уравнение

$$4\operatorname{tg}3x=3\operatorname{tg}4x\Leftrightarrow\frac{12\operatorname{tg}x-4\operatorname{tg}^3x}{1-3\operatorname{tg}^2x}=\frac{12\operatorname{tg}x-12\operatorname{tg}^3x}{1-6\operatorname{tg}^2x+\operatorname{tg}^4x}.$$

После преобразований получим, что

$$4\operatorname{tg}3x=3\operatorname{tg}4x\Leftrightarrow\operatorname{tg}^3x\frac{\operatorname{tg}^4x+7}{\left(1-3\operatorname{tg}^2x\right)\left(1-6\operatorname{tg}^2x+\operatorname{tg}^4x\right)}=0\Leftrightarrow\operatorname{tg}x=0.$$

Следовательно, исходная система равносильна следующей системе $\begin{cases}y=2x+\pi n,\\ x=\pi k,\end{cases}k,n\in Z$. Получим, что $\begin{cases}x=\pi k,\\ y=\pi(2k+n),\end{cases}k,n\in Z$.

Так как параметры k и n независимы, то $2k+n$ — произвольное целое число.

Таким образом, окончательно получаем, что $\begin{cases}x=\pi k,\\ y=\pi m,\end{cases}k,m\in Z$.

Ответ: $(\pi k;\pi m)$, $(k, m\in Z)$.

Пример 11. Решите систему уравнений $\begin{cases} x+y+z=\pi, \\ \operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}z=2, \\ \operatorname{tg}y\cdot\operatorname{tg}z=18. \end{cases}$

Решение.

$$\begin{cases} x+y+z=\pi, \\ \operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}z=2, \\ \operatorname{tg}y\cdot\operatorname{tg}z=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=\pi-(x+y), \\ \operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}(x+y)=-2, \\ \operatorname{tg}y\cdot\operatorname{tg}(x+y)=-18. \end{cases}$$

Заметим, что выполняется условие $\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y\cdot\operatorname{tg}(x+y)\neq 0$, и поэтому, разделив третье уравнение на второе, получаем

$$\begin{cases} z=\pi-(x+y), \\ \operatorname{tg}y=9\operatorname{tg}x, \\ \operatorname{tg}x\dfrac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y}=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg}z=-\operatorname{tg}(x+y), \\ \operatorname{tg}y=9\operatorname{tg}x, \\ 10\operatorname{tg}^2x=-2+18\operatorname{tg}^2x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg}z=-\operatorname{tg}(x+y), \\ \operatorname{tg}y=9\operatorname{tg}x, \\ \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}x=\dfrac{1}{2} \\ \operatorname{tg}x=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \operatorname{tg}x=0,5 \\ \operatorname{tg}y=4,5 \\ \operatorname{tg}z=4 \end{cases} \\ \begin{cases} \operatorname{tg}x=-0,5, \\ \operatorname{tg}y=-4,5, \\ \operatorname{tg}z=-4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\operatorname{arctg}0,5+\pi k, \\ y=\operatorname{arctg}4,5+\pi n, \\ z=\operatorname{arctg}4+\pi l \end{cases} \\ \begin{cases} x=-\operatorname{arctg}0,5+\pi k, \\ y=-\operatorname{arctg}4,5+\pi n, \\ z=-\operatorname{arctg}4+\pi l, \end{cases} \end{array}\right.$$

$$k,\ n,\ l\in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $(\operatorname{arctg}0,5+\pi k; \operatorname{arctg}4,5+\pi n; \operatorname{arctg}4+\pi l)$;

$(-\operatorname{arctg}0,5+\pi k;\ -\operatorname{arctg}4,5+\pi n;\ -\operatorname{arctg}4+\pi l)$,

$(k,n,l\in \mathbb{Z})$.

Пример 12. Решите систему уравнений $\begin{cases} x+y=\alpha, \\ \dfrac{\sin x}{\sin y}=\dfrac{m}{n}. \end{cases}$

Решение.

Если $m=n$, то система приобретает следующий вид:

$$\begin{cases} x+y=\alpha, \\ \dfrac{\sin x}{\sin y}=1. \end{cases}$$

Откуда $\begin{cases} x+y=\alpha, \\ \dfrac{\sin x}{\sin y}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=\alpha, \\ y\neq\pi k, \\ \left[\begin{array}{l} x=y+2\pi l \\ x=\pi-y+2\pi l \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=\alpha, \\ x-y=2\pi l, \\ y\neq\pi k \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=\alpha, \\ x+y=\pi+2\pi l, \\ y\neq\pi k, \end{cases} \end{array}\right. \quad (k,\ l\in\mathrm{Z})\cdot$

Решая первую систему совокупности, получим

$$\begin{cases} x=\dfrac{\alpha}{2}+\pi l, \\ y=\dfrac{\alpha}{2}-\pi l, \quad (k,\ l\in\mathrm{Z}). \\ y\neq\pi k, \end{cases}$$

Данная система имеет решение в том случае, если $\alpha\neq\pi r$, $r\in\mathrm{Z}$. В противном случае система решений не имеет.

Вторая система совокупности имеет решение лишь в том случае, если $\alpha=\pi+2\pi l, l\in\mathrm{Z}$.

В этом случае $\begin{cases} \alpha=\pi+2\pi l, \\ x+y=\pi+2\pi l, \\ y\neq\pi k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi k<y<\pi(k+1), \\ x=\pi-y+2\pi l, \\ \alpha=\pi+2\pi l \end{cases} \quad k,l\in\mathrm{Z}\cdot$

Рассмотрим случай, когда $m\neq n$. В этом случае

$$\begin{cases} x+y=\alpha, \\ \dfrac{\sin x}{\sin y}=\dfrac{m}{n} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=\alpha, \\ \dfrac{\sin x+\sin y}{\sin x-\sin y}=\dfrac{m+n}{m-n} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=\alpha, \\ \dfrac{2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}}{2\sin\dfrac{x-y}{2}\cos\dfrac{x+y}{2}}=\dfrac{m+n}{m-n}\cdot \end{cases}$$

При преобразовании второго уравнения мы воспользовались свойствами числовой пропорции: $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}\Leftrightarrow\dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{c+d}{c-d}, bd\neq0$.

Получим:

$$\begin{cases} x+y=\alpha, \\ \operatorname{tg}\dfrac{x+y}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{x-y}{2}=\dfrac{m+n}{m-n} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=\alpha, \\ \operatorname{ctg}\dfrac{x-y}{2}=\dfrac{m+n}{m-n}\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=\alpha, \\ \dfrac{x-y}{2}=\operatorname{arcctg}\left(\dfrac{m+n}{m-n}\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\right)+\pi n \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=\alpha,\\ x-y=2\operatorname{arcctg}\left(\dfrac{m+n}{m-n}\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\right)+2\pi l\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{\alpha}{2}+\operatorname{arcctg}\left(\dfrac{m+n}{m-n}\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\right)+\pi l,\\ y=\dfrac{\alpha}{2}-\operatorname{arcctg}\left(\dfrac{m+n}{m-n}\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\right)+\pi l\end{cases}\quad l\in Z.$$

Для существования данного решения необходимо, чтобы $\sin\dfrac{\alpha}{2}\neq 0\Leftrightarrow\alpha\neq 2\pi l, l\in Z$.

Ответ: при $m\neq n$ и $\alpha\neq 2\pi k, k\in Z$ — решение

$$\left(\frac{\alpha}{2}+\operatorname{arcctg}\left(\frac{m+n}{m-n}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)+\pi k;\ \frac{\alpha}{2}-\operatorname{arcctg}\left(\frac{m+n}{m-n}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)-\pi k\right),\ k\in Z;$$

при $m\neq n$ $\alpha=2\pi l$, $l\in Z$ — решений нет;

при $m=n$ $\alpha\neq\pi+2\pi l$, $l\in Z$ — решение $\left(\dfrac{\alpha}{2}+\pi l;\ \dfrac{\alpha}{2}-\pi l\right)$, $l\in Z$;

при $m=n$ $\alpha=\pi+2\pi l$, $l\in Z$ — решение $\begin{cases}\pi k<y<\pi(k+1),\\ x=\pi-y+2\pi l,\\ \alpha=\pi+2\pi l,\end{cases}$ $k, l\in Z$.

Пример 13. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}x+y+z=\pi,\\ \operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y=a,\\ \operatorname{tg}y\cdot\operatorname{tg}z=b,\end{cases}\quad a, b>0.$$

Решение.

Ранее такая система уравнений уже была рассмотрена при некоторых конкретных значениях параметров.

При исследовании данной системы воспользуемся условным тождеством – если $x+y+z=\pi$, то $\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}z=\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y\cdot\operatorname{tg}z$. Получим, что

$$\begin{cases}x+y+z=\pi,\\ \operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y=a,\\ \operatorname{tg}y\cdot tg\,z=b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+z=\pi,\\ \operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y\cdot\operatorname{tg}z=\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}z,\\ a\operatorname{tg}z=\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}z,\\ b\operatorname{tg}x=\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}z\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+z=\pi,\\ \operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y\cdot\operatorname{tg}z=\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}z,\\ \operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=(a-1)\operatorname{tg}z,\\ (b-1)\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y=\operatorname{tg}z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+z=\pi,\\ \operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y\cdot\operatorname{tg}z=\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}z,\\ \operatorname{tg}x=\dfrac{a}{b}\operatorname{tg}z,\\ \operatorname{tg}y=\left(\dfrac{ab-(a+b)}{b}\right)\operatorname{tg}z\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+z=\pi,\\ \operatorname{tg}x=\dfrac{a}{b}\operatorname{tg}z,\\ \operatorname{tg}y=\dfrac{ab-(a+b)}{b}\operatorname{tg}z,\\ \dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{ab-(a+b)}{b}\operatorname{tg}^3z=\left(1+\dfrac{a}{b}+\dfrac{ab-(a+b)}{b}\right)\operatorname{tg}z.\end{cases}$$

Так как из условия системы следует, что $\operatorname{tg} z\neq 0$, то получим:

$$\begin{cases}x+y+z=\pi,\\ \operatorname{tg} x=\dfrac{a}{b}\operatorname{tg} z,\\ \operatorname{tg} y=\dfrac{ab-(a+b)}{b}\operatorname{tg} z,\\ \operatorname{tg}^2 z=\dfrac{b^2}{ab-(a+b)}.\end{cases}$$

Из последнего уравнения системы следует, что система может иметь решение лишь в том случае, когда $ab>a+b$.

Тогда

$$\begin{cases}x+y+z=\pi,\\ \operatorname{tg} x=\pm\dfrac{a}{\sqrt{ab-(a+b)}},\\ \operatorname{tg} y=\pm\sqrt{ab-(a+b)},\\ \operatorname{tg} z=\pm\dfrac{b}{\sqrt{ab-(a+b)}}.\end{cases}$$

Учитывая первое условие системы, получим, что

$$\begin{cases} x+y+z=\pi, \\ \operatorname{tg} x\cdot \operatorname{tg} y=a, \quad ab\neq 0 \Leftrightarrow \\ \operatorname{tg} y\cdot \operatorname{tg} z=b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\operatorname{arctg}\dfrac{a}{\sqrt{ab-(a+b)}}+\pi k, \\ y=\operatorname{arctg}\sqrt{ab-(a+b)}+\pi n, \qquad k,n\in Z,\ a,b>0 \\ z=\operatorname{arctg}\dfrac{b}{\sqrt{ab-(a+b)}}-\pi(k+n) \end{cases} \\ \begin{cases} x=-\operatorname{arctg}\dfrac{a}{\sqrt{ab-(a+b)}}+\pi k, \\ y=-\operatorname{arctg}\sqrt{ab-(a+b)}+\pi n, \qquad k,n\in Z. \\ z=-\operatorname{arctg}\dfrac{b}{\sqrt{ab-(a+b)}}+\pi(2-k-n) \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(\operatorname{arctg}\dfrac{a}{\sqrt{ab-(a+b)}}+\pi k, \operatorname{arctg}\sqrt{ab-(a+b)}+\pi n;\right.$

$\left.\operatorname{arctg}\dfrac{b}{\sqrt{ab-(a+b)}}-\pi(k+n)\right),$

$\left(-\operatorname{arctg}\dfrac{a}{\sqrt{ab-(a+b)}}+\pi k, -\operatorname{arctg}\sqrt{ab-(a+b)}+\pi n;\right.$

$\left.-\operatorname{arctg}\dfrac{b}{\sqrt{ab-(a+b)}}-\pi(k+n-2)\right)\ (k,n\in Z).$

Пример 14. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \cos x\cos y=1-a^2, \\ \sin x\sin y=1-2a. \end{cases}$$

Решение.

Заменим уравнения системы их суммой и разностью:

$$\begin{cases} \cos x\cos y=1-a^2, \\ \sin x\sin y=1-2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(x-y)=2-2a-a^2, \\ \cos(x+y)=2a-a^2. \end{cases}$$

Полученная система будет иметь решения при тех значениях параметра, при которых имеет решение следующая система:

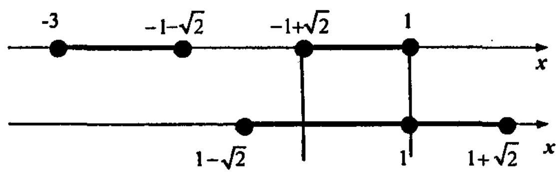
$$\begin{cases} \left|2-2a-a^2\right| \le 1, \\ \left|2a-a^2\right| \le 1. \end{cases}$$

Выполняя равносильные преобразования, получим:

$$\begin{cases} \left|2-2a-a^2\right| \le 1, \\ \left|2a-a^2\right| \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(2-2a-a^2\right)^2-1 \le 0, \\ \left(2a-a^2\right)^2-1 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(a^2+2a-3\right)\left(a^2+2a-1\right) \le 0, \\ \left(a^2-2a-1\right)\left(a^2-2a+1\right) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a+3)(a-1)\left(a+1-\sqrt{2}\right)\left(a+1+\sqrt{2}\right) \le 0, \\ (a-1)^2\left(a-1-\sqrt{2}\right)\left(a-1+\sqrt{2}\right) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{2}-1 \le a \le 1$$



При найденных значениях параметра получим

$$\begin{cases} x-y=\pm\arccos\left(2-2a-a^2\right)+2\pi k, \\ x+y=\pm\arccos\left(2a-a^2\right)+2\pi n \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2}\left(\pm\arccos\left(2-2a-a^2\right)+\left(\pm\arccos\left(2a-a^2\right)\right)+2\pi(n+k)\right), \\ y=\frac{1}{2}\left(\pm\arccos\left(2-2a-a^2\right)-\left(\pm\arccos\left(2a-a^2\right)\right)+2\pi(k-n)\right), \end{cases}$$

$$k,\ n \in Z.$$

Выбор знаков произволен (4 варианта), но одинаков для x и y.

Ответ: при $\sqrt{2}-1 \le a \le 1$

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}\left(\pm\arccos\left(2-2a-a^2\right)+\left(\pm\arccos\left(2a-a^2\right)\right)+2\pi(n+k)\right), \\ y=\frac{1}{2}\left(\pm\arccos\left(2-2a-a^2\right)-\left(\pm\arccos\left(2a-a^2\right)\right)+2\pi(k-n)\right) \end{cases} k,n \in Z$$

При $a \in \left(-\infty;\sqrt{2}-1\right) \cup (1;+\infty)$ решений нет.

Пример 15. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} \sin x \sin y = \dfrac{1}{(z-1)^2}, \\ \cos x \cos y = \dfrac{(x-y)^2}{a^2}, \\ \sin(x+y) = \dfrac{2(x-y)}{a(z-1)} \end{cases}$ имеет единственное решение, удовлетворяющее условиям $0 \le y \le \frac{\pi}{2}$, $z > 0$.

Решение.

Пусть a — такое значение параметра, при котором $(x_0; y_0; z_0)$ — единственное решение системы, удовлетворяющее условиям $0 \le y_0 \le \frac{\pi}{2}$, $z_0 > 0$.

Тогда будут справедливы числовые равенства

$$\sin x_0 \sin y_0 = \frac{1}{(z_0-1)^2},$$

$$\cos x_0 \cos y_0 = \frac{(x_0-y_0)^2}{a^2},$$

$$\sin(x_0+y_0) = \frac{2(x_0-y_0)}{a(z_0-1)},$$

а также числовые неравенства $0 \le y_0 \le \frac{\pi}{2}$, $z_0 > 0$. Возведем третье равенство в квадрат

$$\sin^2(x_0+y_0) = \frac{4(x_0-y_0)^2}{a^2(z-1)^2} = 4\frac{1}{(z_0-1)^2} \cdot \frac{(x_0-y_0)^2}{a^2}.$$

Таким образом,

$$\sin^2(x_0+y_0) = 4\sin x_0 \sin y_0 \cos x_0 \cos y_0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin^2(x_0-y_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 - y_0 = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Учитывая полученное соотношение, получим, что

$$\sin x_0 = \sin(y_0 + \pi k) = (-1)^k \sin y_0,$$

$$\cos x_0 = \cos(y_0 + \pi k) = (-1)^k \cos y_0$$

Подставим эти выражения в два первых равенства.

Тогда: $(-1)^k \sin^2 y_0 = \frac{1}{(z_0-1)^2}$, $(-1)^k \cos^2 y_0 = \frac{(x_0-y_0)^2}{a^2}$. Данные равенства возможны лишь, когда k — четное число. Таким образом — $k=2n,\ n\in Z$.

Следовательно, $\begin{cases}\sin x_0 = \sin y_0,\\ \cos x_0 = \cos y_0,\end{cases}$ а т.к. $0\le y_0\le\frac{\pi}{2}$, $z_0>0$, то

$$\begin{cases}\sin x_0 = \sin y_0 = \dfrac{1}{|z_0-1|},\\ \cos x_0 = \cos y_0 = \dfrac{|2\pi n|}{|a|}.\end{cases}$$

Таким образом, искомое решение $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ удовлетворяет системе условий:

$$\begin{cases}\sin y_0 = \dfrac{1}{|z_0-1|},\\ \cos y_0 = \dfrac{2\pi|n|}{|a|}\\ x_0 = y_0 + 2\pi n,\quad k,\ n\in Z.\\ z_0>0,\\ 0\le\dfrac{2\pi|n|}{|a|}\le 1,\end{cases}$$

Как легко видеть, при любых $a\ne0$ $n=0$ является решением последнего неравенства, и система имеет единственное решение $\left(\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2};\ 2\right)$. Следовательно, $n=0$ должно быть единственным целым числом, при котором система имеет Решение.Получим, что $|n|\le\frac{|a|}{2\pi}<1 \Leftrightarrow 0<|a|<2\pi$.

Ответ: $(-2\pi;\ 0)\cup(0;\ 2\pi)$.

Пример 16. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}2\cos x = 3\operatorname{tg} y,\\ 2\cos y = 3\operatorname{tg} z,\\ 2\cos z = 3\operatorname{tg} x\end{cases}$$

Решение.

В силу симметрии системы относительно круговой перестановки переменных, получим, что если набор чисел (a,b,c) является решением данной системы, то (b, c, a), (c, a, b) — также решения.

Из условия системы также следует, что величины $\mathrm{tg}x,\ \mathrm{tg}y,\ \mathrm{tg}z \in \left[-\frac{2}{3};\ \frac{2}{3}\right]$.

Записав при указанных ограничениях первое уравнение в виде $x = \arccos\left(\frac{3}{2}\mathrm{tg}\, y\right)$ и аналогично оставшиеся уравнения системы, получим систему, равносильную исходной

$$\begin{cases} x = \arccos\left(\frac{3}{2}\mathrm{tg}\, y\right), \\ y = \arccos\left(\frac{3}{2}\mathrm{tg}\, z\right), \\ z = \arccos\left(\frac{3}{2}\mathrm{tg}\, x\right) \\ -\frac{2}{3} \le \mathrm{tg}\, x,\ \mathrm{tg}\, y,\ \mathrm{tg}\, z \le \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Последнее неравенство есть краткая запись трех неравенств, задающих ограничения.

Используя функцию $f(t) = \arccos\left(\frac{3}{2}\mathrm{tg}\, t\right)$. систему можно записать в виде

$$\begin{cases} z = f(x), \\ y = f(z), \\ x = f(y), \\ -\frac{2}{3} \le \mathrm{tg}\, x, \mathrm{tg}\, y, \mathrm{tg}\, z \le \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = f(x), \\ y = f(f(x)), \\ x = f(f(f(x))), \\ -\frac{2}{3} \le \mathrm{tg}\, x, \mathrm{tg}\, y, \mathrm{tg}\, z \le \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Таким образом, последнее уравнение приведено к виду, который может быть сильно упрощен, если только функция $f(t) = \arccos\left(\frac{3}{2}\mathrm{tg}\ t\right)$ монотонна на указанном промежутке изменения ее аргумента.

$$f'(t)=-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{9}{4}\operatorname{tg}^2 t}}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\cos^2 t}=-\frac{1+\operatorname{tg}^2 t}{3\sqrt{4-9\operatorname{tg}^2 t}}.$$

Очевидно, что для любого $\operatorname{tg} t\in\left(-\frac{2}{3};\ \frac{2}{3}\right)$ выполнено неравенство $f'(t)<0$, и поэтому функция $f(t)=\arccos\left(\frac{3}{2}\operatorname{tg}\ t\right)$ монотонно убывает. Следовательно, уравнение $x=f(f(f(x)))\Leftrightarrow x=f(x)$.

Система приводится к виду

$$\begin{cases}\cos x=\frac{3}{2}\operatorname{tg}\ x,\\ \cos z=\frac{3}{2}\operatorname{tg}\ x,\\ \cos y=\frac{3}{2}\operatorname{tg}\ z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\cos^2 x=3\sin x,\\ \cos z=\frac{3}{2}\operatorname{tg}\ x,\\ \cos y=\frac{3}{2}\operatorname{tg}\ z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\sin^2 x+3\sin x-2=0,\\ \cos z=\frac{3}{2}\operatorname{tg}\ x,\\ \cos y=\frac{3}{2}\operatorname{tg}\ z\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sin x=-2,\\ \sin x=\frac{1}{2}\end{array}\right.\\ \cos z=\frac{3}{2}\operatorname{tg}\ x,\\ \cos y=\frac{3}{2}\operatorname{tg}\ z\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\frac{\pi}{6}+2\pi k,\\ \cos z=\frac{\sqrt{3}}{2},\\ \cos y=\frac{3}{2}\operatorname{tg} z\end{cases}\\ \begin{cases}x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\\ \cos z=-\frac{\sqrt{3}}{2},\\ \cos y=\frac{3}{2}\operatorname{tg}\ z\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\frac{\pi}{6}+2\pi k,\\ z=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n,\\ \cos y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}\\ \begin{cases}x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\\ z=\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi n\\ \cos y=\mp\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\frac{\pi}{6}+2\pi k,\\ z=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n,\\ y=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi m\end{cases}\\ \begin{cases}x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\\ z=\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\\ y=\mp\frac{5\pi}{6}+2\pi m,\end{cases}\end{array}\right.$$

$(k,\ n,\ m\in\mathbb{Z})$.

Ответ: $\left(\frac{\pi}{6}+2\pi k;\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi m;\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi n\right)$;

$\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi k;\mp\frac{5\pi}{6}+2\pi m;\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi n\right)$,

$(k,\ m,\ n\in\mathbb{Z})$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задания с выбором ответа

32. Пусть $(x_0; y_0)$ решение системы $\begin{cases}\sin(x+y)=0,\\ \sin(x-y)=0.\end{cases}$ с наименьшими положительными значениями x_0 и y_0.
Найдите сумму $x_0 + y_0$.

1) π
2) $\frac{2\pi}{3}$
3) $\frac{\pi}{2}$
4) $\frac{3\pi}{2}$

33. Решите систему уравнений $\begin{cases}4y+\sqrt{3}\cos x=-\frac{1}{2},\\ 28y+4\sqrt{3}\cos x=1.\end{cases}$

1) $\left(\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k;\frac{1}{4}\right)$
2) $\left(\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k;\frac{1}{4}\right)$
3) $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k;\frac{1}{4}\right)$
4) $\left(\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi k;\frac{1}{4}\right)$

34. Решите систему уравнений $\begin{cases}x-y=\frac{\pi}{4};\\ \operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y=1\end{cases}$ и укажите наименьшую сумму $|x|+|y|$, где $(x;\ y)$ — решение данной системы.

1) 0
2) $\frac{2\pi}{3}$
3) $\frac{\pi}{4}$
4) $\frac{\pi}{2}$

35. Решите систему уравнений $\begin{cases}\sqrt{2}\sin x=\sin y,\\ \sqrt{2}\cos x=\sqrt{3}\cos y\end{cases}$ и найдите наименьшее решение, удовлетворяющее условиям $x>0, y>0$.

1) $\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4}\right)$
1) $\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right)$
1) $\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{6}\right)$
1) $\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right)$

36. Решите систему уравнений $\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2, \\ \cos x \cdot \cos y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ и найдите наименьшее решение, удовлетворяющее условиям $x > 0,\ y > 0$.

1) $\left(\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{\pi}{4}\right)$

2) $\left(\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{\pi}{6}\right)$

3) $\left(\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{6}\right)$

4) $\left(\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}\right)$

Задания с кратким ответом

37. Решите уравнение $\sin^4 x + \cos^{15} x = 1$.

38. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{\sin x} \cdot \cos y = 0, \\ 2\sin^2 x - \cos 2y - 2 = 0. \end{cases}$$

39. Какое наибольшее количество корней имеет уравнение $\dfrac{\cos 2x}{\sin x} = a \cdot \cos 2x$ на отрезке $[0;\ 2\pi]$?

40. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 8^{-\sin 4x} + 8 \cdot 9^{\cos y} = 80, \\ 5 \cdot 8^{-\sin 4x} - 7 \cdot 9^{\cos y} = b \end{cases},\ b \in Z.$$

41. Решите систему уравнений $\begin{cases} x + y = \dfrac{3}{20}\pi, \\ 4\sin x \cdot \cos y = 1. \end{cases}$

Задания с развернутым ответом

42. Решите систему уравнений $\begin{cases} \operatorname{tg}(\pi x) + \operatorname{tg}(\pi y) = 2\sqrt{3}, \\ x + y = \dfrac{2}{3}. \end{cases}$

43. Решите систему уравнений $\begin{cases} x + y + z = \pi, \\ \operatorname{tg} x\ \operatorname{tg} y = 2, \\ \operatorname{tg} y\ \operatorname{tg} z = 6. \end{cases}$

44. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sin x + \cos y = 2a^2, \\ \sin x\ \cos y = 1 - a^2. \end{cases}$

45. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+y+z=xyz, \\ y=\dfrac{2x}{1-x^2}, \\ z=\dfrac{2y}{1-y^2}. \end{cases}$$

46. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} \sin x \sin y = \dfrac{1}{z^2}, \\ \cos x \cos y = -\dfrac{(x+y)^2}{(a-\pi)^2}, \\ \sin(x-y) = \dfrac{2(x+y)}{(a-\pi)} \end{cases}$ имеет единственное решение, удовлетворяющее условиям $z>0$, $0<y<\dfrac{\pi}{2}$.

Глава 6. Геометрические фигуры и их свойства

§ 1. Планиметрия

Задачи по планиметрии можно сгруппировать по следующим темам:

1. Треугольники.
2. Четырехугольники (параллелограмм и трапеция).
3. Окружности, вписанные в треугольник и описанные около треугольника.
4. Окружности, вписанные в четырехугольник и описанные около четырехугольника.

Задачи по теме «Треугольники» направлены на проверку следующих умений выпускников и абитуриентов:

- применять свойства равнобедренного и прямоугольного треугольников;
- вычислять элементы треугольников, используя теорему Пифагора, тригонометрические функции острых углов, теоремы синусов и косинусов;
- применять признаки подобия треугольников;
- вычислять площади треугольников;
- применять свойства медиан, биссектрис и средней линии треугольника.

Задачи по теме «Четырехугольники» направлены на проверку следующих умений выпускников и абитуриентов:

- применять определение, свойства и признаки параллелограмма, его частных видов;
- применять свойства равнобедренной и прямоугольной трапеций, свойства средней линии трапеции;
- вычислять площади параллелограмма и трапеции.

Для решения задач, связанных с окружностью, вписанной в треугольник или четырехугольник, учащимся было необходимо знать и уметь применять следующие утверждения:

- центр окружности лежит на биссектрисе угла;
- отрезок, соединяющий центр окружности и точку ее касания со стороной, перпендикулярен этой стороне;
- отрезки двух соседних сторон, концами которых служат общая вершина сторон и точки касания, равны.

Для решения задач, связанных с окружностью, описанной около треугольника или четырехугольника, учащимся было необходимо уметь применять

- свойство центральных и вписанных углов окружности;
- свойство отрезков двух пересекающихся хорд;
- следствие из теоремы синусов о радиусе окружности, описанной около треугольника;

а также знать, что центр описанной окружности лежит на серединном перпендикуляре к стороне треугольника (четырехугольника).

Разумеется, для решения задач требуются и другие изученные планиметрические факты, например, необходимо уметь применять свойства простейших фигур — отрезков и углов.

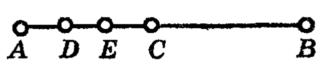
Пример 1.

Точки C, E, D делят отрезок AB в отношении $1:2$, $1:3$, $1:4$, считая от точки A. В каком отношении точка E делит отрезок CD?

Решение.

Имеем: $AC:CB=1:2$, следовательно, $AC=\frac{1}{3}AB$.

Аналогично получим, что $AE=\frac{1}{4}AB$, $AD=\frac{1}{5}AB$.



Тогда получим, что $DC=AC-AD=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)AB=\frac{2}{15}AB$,

$DE=AE-AD=\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)AB=\frac{1}{20}AB$.

$EC = DC - DE = \frac{1}{12}AB$, $DE : EC = \frac{1}{12} : \frac{1}{20} = \frac{5}{3}$.

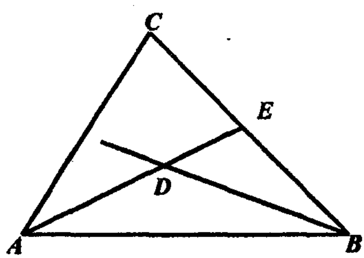
Ответ: 5:3.

Пример 2.

В треугольнике ABC угол $\angle A = 50°$, $\angle B = 70°$. Найдите острый угол, образованный биссектрисами данных углов.

Решение. Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов треугольника, не смежных с ним. Поэтому

$$\angle BDE = \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B = 60°.$$



Ответ: 60°.

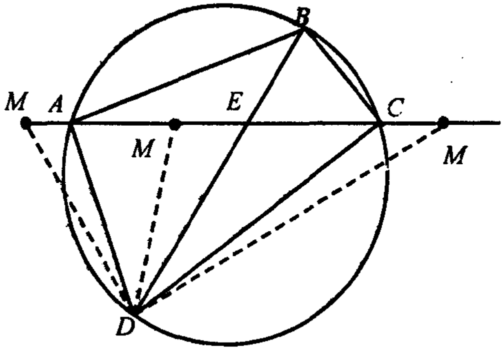
Пример 3.

Диагонали четырехугольника $ABCD$, вписанного в окружность, пересекаются в точке E. На прямой AC взята точка M, причем $\angle DME = 80°$, $\angle ABD = 60°$, $\angle CBD = 70°$. Где расположена точка M: на диагонали или на ее продолжении? Ответ обосновать.

Решение.

Рассмотрим все возможные варианты расположения точки M.

1) Пусть точка M расположена на продолжении диагонали AC за точку A. В этом случае получаем, что $\angle CAD = \angle CBD = 70°$. Но угол CAD — внешний угол треугольника DAM, поэтому его мера должна быть больше меры угла DMA. Но это противоречит условию задачи. Таким образом, точка M не может располагаться на продолжении диагонали AC за точку A.



2) Пусть теперь точка M расположена на продолжении диагонали AC за точку C. В этом случае $\angle ACD = \angle ABD = 70°$. Но, как и в предыдущем случае, угол ACD — внешний угол треугольника DMC. Следовательно, $\angle ACD > \angle DMC$. Поэтому точка M не может быть расположена на продолжении диагонали AC за точку C.

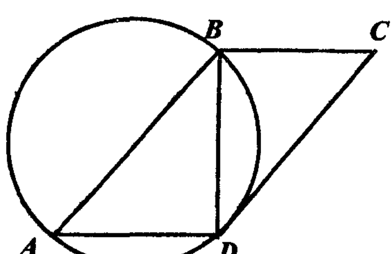
3) Таким образом, точка M расположена на диагонали AC.

Ответ: точка M расположена на диагонали AC.

Пример 4.

Длина диагонали BD параллелограмма $ABCD$ равна 2, угол C равен 45°, и прямая CD касается окружности, описанной около треугольника ABD. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.

Решение.



Так как прямая CD касается окружности, описанной около треугольника ABD, то она касается окружности в точке D. Следовательно, $\angle A = \angle C = 45°$, $\angle BDC = \frac{1}{2}\breve{BD} = \angle A = 45°$.

Но тогда треугольник BDC — равнобедренный и прямоугольный. Следовательно, $BD \perp AC$, $AC = BD = 2$.

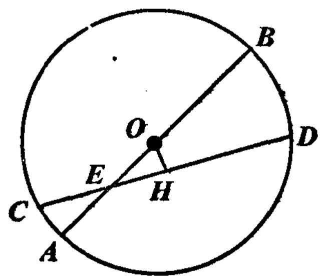
Искомая площадь $S_{ABCD} = AC \cdot BD = 2 \cdot 2 = 4$.

Ответ: 4.

Пример 5.

Хорда пересекает диаметр под углом 30° и делит его на два отрезка длиной 2 и 6. Найдите расстояние от центра окружности до хорды.

Решение.



Диаметр окружности равен 8.

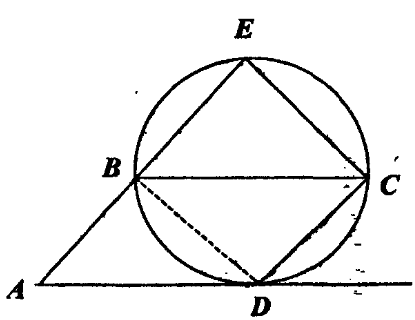
Поэтому $OE = 2$, $OH = OE \cdot \sin 30° = 1$.

Ответ: 1.

Пример 6.

Окружность, проходящая через вершины C и D параллелограмма $ABCD$, касается прямой AD и пересекает прямую AB в точках B и E. Найдите AE, если $AD = 4, CE = 5$.

Решение.



Заметим, что $\angle BCD = \angle ADB$, так как первый из них — вписанный, опирающийся на дугу BD, а второй образован касательной и хордой, проходящей через точку касания, а BD заключена между ними.

Следовательно, треугольник DBC — равнобедренный. Но тогда и треугольник ABD также равнобедренный. Получим, что $\angle A = \angle CBE = \angle DBC = \angle DBA = \angle C = \alpha$. Тогда $\angle BDC = \pi - 2\alpha$.

Пусть R — радиус окружности, тогда

$$EC = 2R\sin\alpha,\ BC = 2R\sin 2\alpha.$$

Подставляя данные задачи, получаем: $\dfrac{2R\sin 2\alpha}{2R\sin\alpha} = \dfrac{4}{5}$, откуда $\cos\alpha = \dfrac{2}{5}$.

Из треугольника BEC получим, что

$$CE^2 = BC^2 + BE^2 - 2 \cdot BE \cdot BC \cdot \cos\alpha;$$

$$25 = 16 + BE^2 - 8 \cdot BE \cdot \frac{2}{5};$$

$$BE^2 - \frac{16}{5}BE - 9 = 0;\ BE = 5;$$

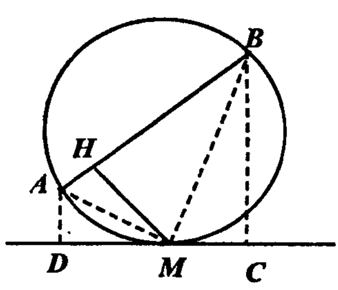
$$AB = \frac{2}{\cos\alpha} = \frac{1}{5};\ AE = AB + BE = \frac{1}{5} + 5 = 5{,}2.$$

Ответ: 5,2.

Пример 7.

Окружность и прямая касаются в точке M. Из точек A и B окружности опущены перпендикуляры на прямую, равные a и b. Найдите расстояние от точки M до прямой AB.

Решение.



Пусть $AD = a$, $BC = b$. Соединив точку M с точками A и B и рассмотрев получившиеся при этом углы, получим:

$$\angle AMD = \angle ABM = \alpha, \angle BAM = \angle BMC = \beta.$$

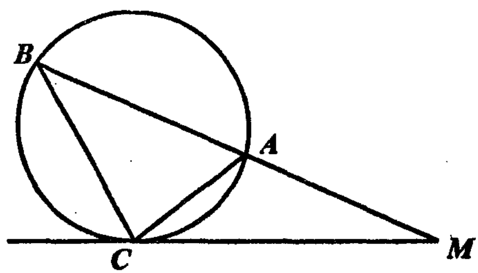
Тогда $MH = \frac{a}{\sin\alpha}\cdot\sin\beta$ и $MH = \frac{b}{\sin\beta}\cdot\sin\alpha$. Перемножив полученные равенства, получим, что $MH^2 = ab$, откуда $MH = \sqrt{ab}$.

Ответ: $MH = \sqrt{ab}$.

Пример 8.

Одна из двух прямых, проходящих через точку M, касается окружности в точке C, а вторая пересекает ее в точках A и B, причем A — середина отрезка BM. Известно, что $MC = 2$, $\angle BMC = 45°$. Найдите радиус окружности.

Решение.



Пусть $AM = x$, тогда $MB = 2x$. Используя теорему о касательной и секущей, проведенных из одной точки к окружности, получим, что $MC^2 = AM \cdot MB$, т.е. $2x^2 = 4$; $x = \sqrt{2}$.

$$\text{Тогда } AC^2 = MA^2 + MC^2 - 2AM \cdot MC \cdot \cos 45° = 2 + 4 - 2\cdot\sqrt{2}\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 2.$$

Следовательно, $AC = \sqrt{2}$. Но тогда треугольник CAM — прямоугольный. Следовательно, треугольник CAB также прямоугольный. Поэтому BC — диаметр окружности.

Следовательно, треугольник MCB — тоже прямоугольный и равнобедренный, т.к. $\angle BMC = 45°$.

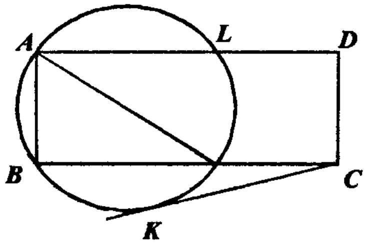
Тогда $2R = BC = CM = 2$, $R = 1$.

Ответ: 1.

Пример 9.

Окружность диаметром $\sqrt{10}$ проходит через вершины A и B прямоугольника $ABCD$, а касательная к ней, проведенная из точки C, равна 3. Найдите площадь прямоугольника, если $AB=1$.

Решение.



Треугольник ABL вписан в окружность, и, кроме того, является прямоугольным. Следовательно, AL — диаметр окружности.

По теореме Пифагора найдем $BL=\sqrt{10-1}=3$.

По теореме о касательной и секущей, проведенных из точки к окружности, получим:

$$CK^2=BC\cdot CL=(3+CL)\cdot CL;\ CL^2+3\cdot CL-9=0;$$

$$CL=\frac{3}{2}\left(\sqrt{5}-1\right),\ BC=\frac{3}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)+3=\frac{3}{2}\left(\sqrt{5}+1\right),$$

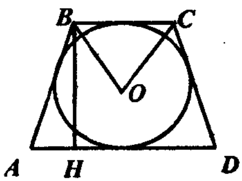
$$S=\frac{3}{2}\left(\sqrt{5}+1\right).$$

Ответ: $\frac{3}{2}\left(\sqrt{5}+1\right)$.

Пример 10.

В равнобокую трапецию, верхнее основание которой в два раза меньше ее высоты, вписана окружность радиусом 3. Найдите площадь трапеции.

Решение.	**Комментарии**
1. $BH=2r=6$ 2. Обозначим: $AH=x$, тогда $AD=r+2x$	1. Так как окружность касается оснований трапеции, то высота трапеции равна диаметру

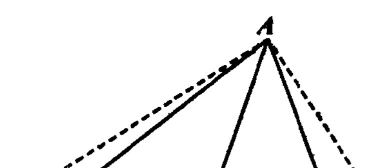
Решение.	Комментарии
3. $AB=\dfrac{AD+BC}{2}=r+x$ 4. $(r+x)^2=x^2+4r^2 \Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}r$ 5. $S=\dfrac{r+4r}{2}\cdot 2r=5r^2=45$ 	окружности. 2. Трапеция $ABCD$ — равнобедренная. 3. Так как трапеция описана около окружности, то суммы противолежащих сторон равны. Боковые стороны равнобедренной трапеции равны. 4. Теорема Пифагора для $\triangle AHB$ 5. $S_{ABCD}=\dfrac{BC+AD}{2}\cdot BH$.

Ответ: 45.

Пример 11.

AD – биссектриса треугольника ABC. Окружность, радиусом $R=56$, центр которой лежит на прямой BC, проходит через точки A и D. Известно, что $AB^2-AC^2=135$, а радиус r окружности, описанной около треугольника ABC равен $7\sqrt{3}$. Найдите площадь треугольника ABC.

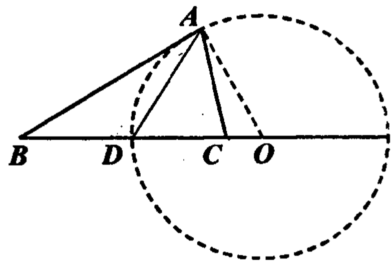
Решение.



1. Выясним сначала, где расположен центр окружности.

Так как $AB^2>AC^2$, то $AB>AC$. Против большей стороны треугольника лежит больший угол, поэтому $\angle C>\angle B$. Так как AD — биссектриса угла A, то

$$\angle ADC=\angle B+\frac{\angle A}{2},\ \angle ADB=\angle C+\frac{\angle A}{2} \text{ и } \angle ADB>\angle ADC.$$



Но точки A и D лежат на одной окружности, поэтому треугольник AO_1D (или AO_2D) — равнобедренный, и угол, прилежащий к его основанию — острый. Поскольку $\angle ADC+\angle ADB=180°$, острым является угол ADC. Следовательно, центр окружности лежит на луче DC.

2. Перейдем к вычислениям.

Так как $\angle ADO=\angle DAO=\angle B+\dfrac{\angle A}{2}$, то $\angle CAO=\angle B$.

Обозначив $AB=x$, $AC=y$, по теореме синусов получим $\dfrac{R}{\sin\left(180^0-C\right)}=\dfrac{OC}{\sin B}$, $\dfrac{x}{\sin C}=\dfrac{y}{\sin B}$.

Следовательно, $OC=\dfrac{y}{x}R$. Тогда $DC=R\left(1-\dfrac{y}{x}\right)=R\dfrac{x-y}{x}$.

По свойству биссектрисы угла треугольника имеем, что $\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{x}{y}$, откуда $BD=R\dfrac{x-y}{y}$, а

$$BC=BD+DC=R(x-y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=R\frac{x^2-y^2}{xy}.$$

Наконец, $\sin A=\dfrac{BD}{2r}$.

Найдем площадь треугольника:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}xy\sin A=\frac{1}{2}xy\cdot R\frac{x^2-y^2}{2rxy}=\frac{R}{4r}\left(x^2-y^2\right).$$

Подставим данные:

$$S=\frac{56}{28\sqrt{3}}\cdot 135=\frac{270}{\sqrt{3}}=90\sqrt{3}.$$

Ответ: $90\sqrt{3}$.

ЗАДАЧИ
ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. M — точка на отрезке AB, причем $AM:MB = 3:2$. Найдите отношение $AM:MB$.

2. Внешние углы выпуклого четырехугольника, взятые по одному при каждой вершине, относятся как $1:2:3:4$. Как относятся больший и меньший углы этого четырехугольника?

3. Биссектрисы внешних углов, смежных с углами B и C, пересекаются в точке D, $\angle A = 40°$. Найдите угол BDC.

4. Через точку A, лежащую на окружности, проведены диаметр AB и хорда AC, причем $AC = 8$, $\angle BAC = 30°$. Найдите длину хорды CM, перпендикулярной AB.

5. Биссектрисы углов равнобокой трапеции $ABCD\ (AD \parallel BC)$, прилежащих к боковым сторонам, пересекаются в точках K и L. Найдите длину отрезка KL, если известно, что длина боковой стороны $AB = 10$, а длины оснований $AD = 23$, $BC = 17$.

6. В треугольнике ABC из вершины B к стороне AC проведен отрезок BK так, что $\angle ABK = \angle BCK$ и $AK = 2$, $CK = 16$. Найдите площадь треугольника ABC, если $\angle A = 30°$.

7. В треугольнике ABC через центр вписанной окружности проведена прямая, параллельная стороне AC и пересекающая стороны AB и BC в точках F и E соответственно. Найдите длину отрезка FE, если $BE = 21$, $AF = 33$.

8. В треугольнике ABC $BC = 4$. Две окружности проходят через вершину A треугольника и пересекаются в точке K. Общая хорда AK принадлежит медиане AM, проведенной к стороне BC и равной 3. Первая окружность касается стороны BC в точке B, вторая касается стороны BC в точке C. Найдите AK.

9. Окружность, с центром в точке O, вписанная в треугольник ABC, касается стороны BC в точке K. Найдите площадь треугольника BOK, если $AC = 2$, периметр треугольника равен 8, $\angle ABC = 60°$.

10. В неравнобедренном треугольнике ABC точки F, E — середины сторон CB и AB соответственно. BG — высота треугольника. Радиус окружности, описанной возле треугольника ABC равен 10. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника FEG.

11. Стороны треугольника равны 5, 6 и 7. Найдите площадь треугольника, вершинами которого служат основания биссектрис данного треугольника.

12. Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает сторону BC в точке D. Точка E лежит на прямой BC, причем $\angle DAE = 90°$. Известно, что $AB^2 - AC^2 = 640$, $DE = 198$, а радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен $66\sqrt{2}$. Найдите площадь треугольника ABC.

13. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла проведена высота CH. В треугольники BCH и ABC вписаны окружности, радиусы которых равны соответственно 4 и 6. Найдите расстояние между центрами этих окружностей.

14. Окружность проходит через вершины A и C треугольника ABC и пересекает стороны AB и BC в точках K и L соответственно. Известно, что $AC = 6$, а $S_{BKL} : S_{AKLC} = 1:8$. Найдите KL.

15. Найдите диаметр окружности, описанной около четырехугольника $ABCD$ со сторонами $AB = 16$, $CD = 12$ и перпендикулярными диагоналями.

16. Средняя линия трапеции делится диагоналями на 3 равные части. Найдите отношение оснований трапеции.

17. AB — диаметр окружности. Точка C — произвольная точка плоскости. Прямые AC и BC вторично пересекают окружность в точках M и N соответственно. Прямые MB и NA пересекаются в точке K. Найдите угол между прямыми CK и AB.

18. В прямоугольном равнобедренном треугольнике ACB ($\angle C = 90°$) с катетами, равными 1, проведена медиана BD. На эту медиану опущен перпендикуляр CP. Найдите расстояние от точки P до точки пересечения медиан треугольника ABC.

19. Около окружности радиуса 1 описана равнобедренная трапеция с боковой стороной, равной 3. Найдите площадь трапеции.

20. Стороны KN и LM трапеции $KLMN$ параллельны, причем $KN = 3$. $\angle LMN = 120°$. Прямые LM и MN являются касательными к окружности, описанной около треугольника KLN. Найдите площадь треугольника KLN.

21. Окружность, построенная на стороне AC треугольника ABC как на диаметре, пересекает его стороны BC и AB в точках L и K соответственно. Найдите площадь треугольника ABC, если $BL = CL$, $BK = 2AK$, $AC = 1$.

22. Окружность, построенная на стороне AC треугольника ABC как на диаметре, пересекает его стороны BC и AB в точках L и K соответственно. Найдите длину отрезка KL, если $AC = \sqrt{13}$, а $\angle B = 45°$.

23. Биссектриса AD треугольника ABC пересекает описанную около треугольника окружность в точке P. Найдите радиус этой окружности, если $AB = 1$, $AC = 2$, $AP = 4$.

§ 2. Стереометрия

В контрольно-измерительные материалы ЕГЭ включены две задачи по стереометрии. Первая помещена в части 2 (задание с кратким ответом) и является задачей средней сложности. Вторая — в части 3 является задачей высокого уровня сложности (как правило, на комбинацию стереометрических тел). Экзаменуемый должен представить развёрнутое и обоснованное решение этой задачи.

В каждой задаче рассматривается какое-нибудь геометрическое тело (призма, пирамида, цилиндр, конус), в задачах части 3 может рассматриваться и шар (сфера). Все задачи являются задачами на вычисление.

От учащихся требуются умения применять изученные определения и теоремы для вычисления углов, расстояний (длин отрезков), площадей и объемов. В частности, умения вычислять

- углы между прямыми;
- углы между прямой и плоскостью;
- двугранные углы (углы между двумя плоскостями);
- расстояние от точки до прямой;
- расстояние от точки до плоскости;
- расстояние между параллельными прямой и плоскостью;
- расстояние между параллельными плоскостями.

Встречаются задачи и на вычисление расстояния между скрещивающимися прямыми (простейшие случаи взаимного расположения).

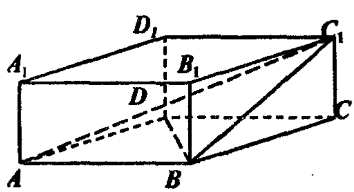
Разумеется, для успешного решения стереометрических задач учащиеся должны хорошо владеть определениями, признаками и свойствами параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости, параллельности и перпендикулярности двух плоскостей. Определениями и свойствами призмы (прямой, правильной), пирамиды, цилиндра и конуса.

Ниже систематизированы некоторые сведения о правильных пирамидах (треугольной и четырехугольной), которые могут быть полезны учащимся при решении задач.

Пример 1.

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AC_1=13$, $BD=12$, $BC_1=11$. Найдите объем параллелепипеда.

Решение.



Обозначив измерения параллелепипеда a,b,c, по теореме Пифагора и по теореме о длине диагонали прямоугольного параллелепипеда получим систему уравнений:

$$\begin{cases} a^2+b^2+c^2=13^3 \\ a^2+b^2=12^2 \\ b^2+c^2=11^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c^2=25 \\ b^2=96 \\ a^2=48 \end{cases}.$$

По доказанному утверждению получим, что

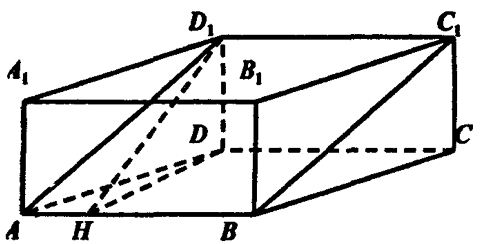
$$V=\sqrt{a^2b^2c^2}=5\cdot 48\sqrt{2}=240\sqrt{2}.$$

Ответ: $240\sqrt{2}$.

Пример 2.

Через сторону основания прямого параллелепипеда, равную a, и противолежащую ей сторону другого основания проведено сечение, составляющее угол β с плоскостью основания. Площадь сечения равна Q. Найдите объем данного параллелепипеда.

Решение.



Так как параллелепипед прямой, то параллелограмм, лежащий в основании призмы, есть ортогональная проекция плоскости сечения. По формуле, связывающей площадь ортогональной проекции с площадью фигуры, получим

$$S_{ABCD}=S_{ABC_1D_1}\cdot\cos\beta=Q\cdot\cos\beta,$$

где β угол между плоскостями ABC и ABC_1.

Пусть $DH\perp AB$, тогда $D_1H\perp AB$ (теореме о трех перпендикулярах), следовательно, $\angle DHD_1=\beta$.

По условию сторона $AB=a$, поэтому $D_1H=\dfrac{Q}{a}$.

Найдем высоту параллелепипеда.

$$DD_1=D_1H\cdot\sin\beta=\frac{Q}{a}\sin\beta.$$

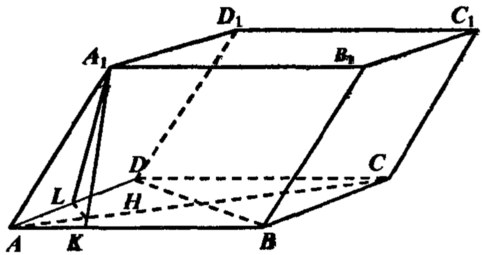
Найдем объем: $V=\dfrac{Q^2}{a}\cdot\sin\beta\cdot\cos\beta=\dfrac{Q^2}{2a}\sin 2\beta$.

Ответ: $V=\dfrac{Q^2}{2a}\sin 2\beta$.

Пример 3.

Основанием наклонного параллелепипеда служит ромб со стороной, равной a, и острым углом 60°. Боковое ребро также равно a и образует с ребрами основания, выходящими из той же вершины, углы 45°. Найдите объем параллелепипеда.

Решение.



Так как боковое ребро AA_1 составляет одинаковые углы со смежными сторонами основания, выходящими из вершины A, то основание высоты параллелепипеда — точка H — лежит на биссектрисе угла DAB.

Так как боковое ребро составляет со смежными сторонами угол 45°, то из прямоугольного треугольника AA_1K, получим, что $AK = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Из прямоугольного треугольника AKH получим, что $AH = \frac{AK}{\cos 30^\circ} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Далее получим, что $A_1H = \sqrt{a^2 - \frac{2}{3}a^2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Найдем площадь основания: $S_{ABCD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Наконец, вычислим объем параллелепипеда:

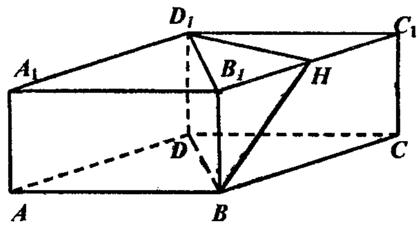
$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} = 0{,}5a^3.$$

Ответ: $0{,}5a^3$.

Пример 4.

В основании прямого параллелепипеда лежит ромб со стороной равной a, и острым углом 60°. Меньшая диагональ параллелепипеда образует с плоскостью боковой грани угол, равный 45°. **Найдите объем параллелепипеда.**

Решение.



Пусть $\angle DAB = 60^\circ$. Тогда BD — меньшая диагональ основания и, следовательно, BD_1 — меньшая диагональ параллелепипеда.

Точка B одинаково удалена от плоскостей CDD_1 и ADD_1, а прямая BD_1 образует с этими плоскостями равные углы. Построим проекцию прямой ВД$_1$ на плоскость CDD_1.

Так как треугольник $B_1C_1D_1$ — равносторонний, то его медиана D_1H перпендикулярна стороне B_1C_1. Но так как параллелепипед прямой, то его ребро BB_1 перпендикулярно плоскости верхнего основания, а, следовательно, и D_1H. Таким образом, D_1H является перпендикуляром к плоскости боковой грани параллелепипеда.

Перейдем к вычислению объема:

$$V = S_{ABCD} \cdot BB_1 = a^2 \sin 60^\circ \cdot BB_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot BB_1. \quad D_1H = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Треугольник D_1HB — прямоугольный и равнобедренный, т.к. $D_1H \perp BH$, $\angle D_1BH = 45^\circ [0,1]$, то $BD_1 = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Из прямоугольного треугольника D_1B_1B получим, что

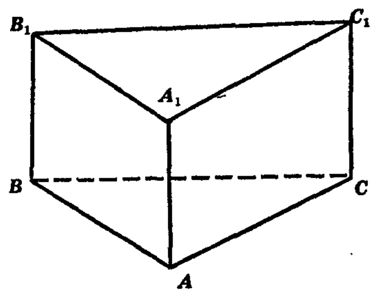
$$BB_1 = \sqrt{B_1D^2 - BD^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}. \text{ Итак, } V = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{4}.$$

Ответ: $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{}$

Пример 5.

В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$, лежит прямоугольный треугольник ABC; $\angle BAC = 90°$, $BC = 37$, $AB = 35$, $AA_1 = 1,1$. Найдите объем призмы.

Решение.



По теореме Пифагора длина катета AC будет равна

$$\sqrt{37^2 - 35^2} = 12.$$

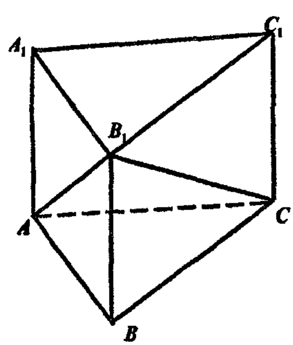
Тогда искомый объем $V = \frac{1}{2} 12 \cdot 35 \cdot 11 = 2310$.

Ответ: 2310.

Пример 6.

Найдите объем прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, если $\angle AB_1C = 60°$, $AB_1 = 3$, $CB_1 = 2$ и двугранный угол с ребром BB_1 — прямой.

Решение.



Так как призма прямая, то ее боковое ребро BB_1 перпендикулярно плоскости основания, следовательно, AB и AC — перпендикуляры к ребру двугранного угла, т.е. образуют линейный угол двугранного угла с ребром BB_1. Следовательно, треугольник ABC — прямоугольный. По теореме косинусов вычислим длину AC: $AC=\sqrt{9+4-2\cdot3\cdot2\cdot\frac{1}{2}}=\sqrt{7}$.

Пусть длины катетов равны a и b, а высота равна h.

$$\begin{cases} a^2+b^2=7 \\ a^2+h^2=4 \\ b^2+h^2=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2+h^2=10 \\ a^2+b^2=7 \\ a^2+h^2=4 \\ b^2+h^2=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2=1 \\ b^2=6 \\ h^2=3 \end{cases}.$$

Вычислив длины катетов и высоту пирамиды, получим

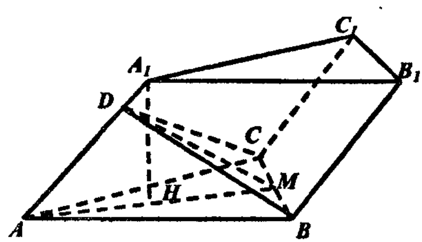
$$V=\frac{1}{2}1\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}=\frac{3}{2}\sqrt{2}.$$

Ответ: $\frac{3}{2}\sqrt{2}$ см^3.

Пример 7.

Каждое ребро наклонной треугольной призмы равно 2, боковые ребра призмы наклонены к плоскости основания под углом 60°. Одно из боковых ребер составляет равные углы со смежными ребрами основания. Найдите объем призмы.

Решение.



Так как ребро AA_1 составляет со смежными боковыми ребрами одинаковые углы, то проекция точки A_1 на плоскость основания попадает на биссектрису угла основания. Поскольку основание — равносторонний треугольник, то AM — его биссектриса, медиана и высота. Проведем сечение BCD, перпендикулярное боковому ребру AA_1.

Высота этого сечения

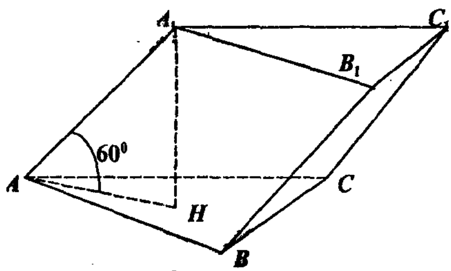
$$DM = AM\sin 60^\circ = Ab\sin^2 60^\circ = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}.$$

Следовательно, площадь перпендикулярного сечения призмы равна $S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$, а объем призмы равен $V = \frac{3}{2} \cdot 2 = 3$.

Пример 8.

Найдите объем наклонной призмы, основание которой — треугольник со сторонами 10, 10 и 12, а боковое ребро, равное 8, составляет с плоскостью основания угол 60°.

Решение.



Проведем высоту призмы A_1H. Так как $\angle A_1AH = 60^\circ$, то

$$A_1H = 8 \cdot \sin 60^\circ = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}.$$

По формуле Герона найдем площадь треугольника ABC. (Мы используем эту формулу, а не то, что треугольник ABC равнобедренный по той причине, что подобное решение более общее.)

Итак, $S = \sqrt{16 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 4} = 48$.

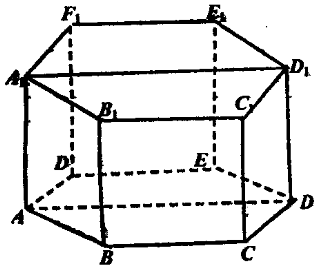
Найдем объем призмы: $V = 48 \cdot 4\sqrt{3} = 192\sqrt{3}$.

Ответ: $V = 192\sqrt{3}$.

Пример 9.

Площадь наибольшего диагонального сечения правильной шестиугольной призмы равна 1. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

Решение.

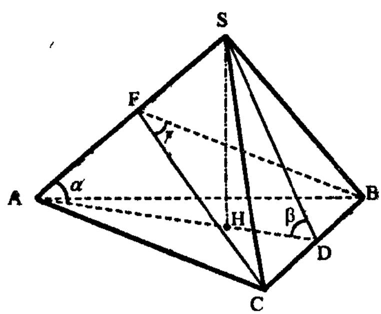


Пусть $ABCDEF...F_1$ — правильная шестиугольная призма. Тогда большая диагональ основания равна диаметру окружности, описанной около него, а сторона основания — радиусу этой окружности. Обозначив большую диагональ основания $2a$, а высоту призмы h, получим, что $S_{\text{сеч.}} = 2ah$. Площадь боковой поверхности равна: $S_{\text{бок.}} = 6ah = 3S_{\text{сеч.}} = 3$.

Ответ: 3.

Пример 10.

Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, угол между боковым ребром и плоскостью основания равен 45°.



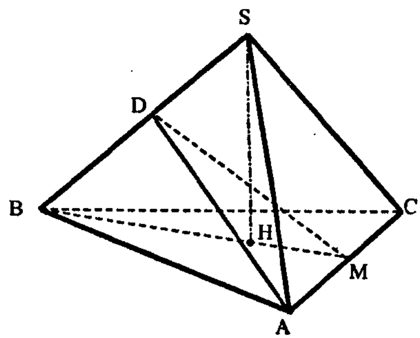
Найдите:
1. Объем пирамиды.
2. Угол боковой грани с основанием пирамиды.
3. Расстояние между скрещивающимися ребрами пирамиды.
4. Угол между боковыми гранями пирамиды.

5. Радиус описанного шара.
6. Полную поверхность пирамиды.
7. Радиус вписанного шара.

Решение	Комментарии
1. $h=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$; $V=\dfrac{a^3}{12}$	ΔASH — прямоугольный, равнобедренный, т.к. $\alpha=45^\circ$
2. $\operatorname{tg}\beta=2\operatorname{tg}\alpha=2$; $\beta=\operatorname{arctg}2$	ΔASH: $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{h\sqrt{3}}{a}$. ΔDSH: $\operatorname{tg}\beta=\dfrac{2h\sqrt{3}}{a}$
3. $FD=\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$	ΔADF — прямоугольный, равнобедренный. $AD=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$
4. $\operatorname{ctg}\dfrac{\varphi}{2}=\sqrt{3}\sin 45^\circ=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ $\operatorname{ctg}\dfrac{\varphi}{2}=\sqrt{\dfrac{1+\cos\varphi}{1-\cos\varphi}}$. $\cos\varphi=\dfrac{1}{5}$. $\varphi=\arccos\dfrac{1}{5}$	ΔCFD — прямоугольный. $\operatorname{ctg}\dfrac{\varphi}{2}=\dfrac{FD}{CD}=\dfrac{a\sqrt{6}}{4}:\dfrac{a}{2}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$
5. $R_ш=\dfrac{a^2+\dfrac{a^2}{3}}{2\sqrt{3}a}=\dfrac{2\sqrt{3}a}{9}$	$R_{ш.}=\dfrac{a^2+3h^2}{6h}$; $h=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$
6. $AS=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$, $h_a=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$. $S_{полн.}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}+3\cdot\dfrac{a^2\sqrt{5}}{4}=$ $=\dfrac{a^2\sqrt{3}\left(1+\sqrt{15}\right)}{4}$.	Апофема пирамиды равна $h_a=\sqrt{h^2+\dfrac{a^2}{12}}$
7. $r_{впис.шара.}=\dfrac{3a^3}{12}:\dfrac{a^2\sqrt{3}\left(\sqrt{15}+1\right)}{4}=$ $\dfrac{a}{\sqrt{3}\left(\sqrt{15}+1\right)}=\dfrac{a\sqrt{3}\left(\sqrt{15}-1\right)}{42}$	$r=\dfrac{3V}{S_{полн.}}$.

Пример 11.

Дана правильная треугольная пирамида $SABC$, сторона AB основания которой равна 1, боковое ребро AS равно 2. BM — медиана основания, AD — биссектриса треугольника SAB. Найдите DM.

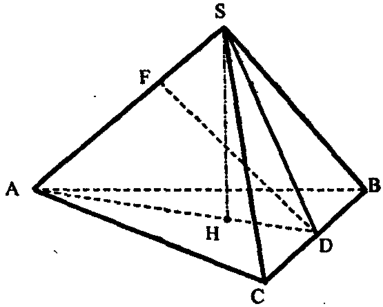


Решение.	Комментарии
1. $BD=\frac{2}{3}$.	Используя свойство биссектрисы угла треугольника, получим, что $\frac{BD}{DS}=\frac{AB}{SA}=\frac{1}{2}$, т.е. $BD=\frac{1}{3}BS$; $\cos\angle SBH=\frac{BH}{BS}$;
2. $\cos\angle SBH=\frac{\sqrt{3}}{6}$ $DM^2=\frac{4}{9}+\frac{3}{4}-2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{6}=\frac{13}{12}$ $DM=\sqrt{\frac{13}{12}}=\frac{\sqrt{39}}{6}$.	$BS=2$; $BH=\frac{\sqrt{3}}{3}$ По теореме косинусов $DM^2=BD^2+BM^2-$ $-2BD\cdot BM\cdot\cos\angle SBM$

Ответ: $\frac{\sqrt{39}}{6}$.

Пример 12.

Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 14, боковая грань образует с плоскостью основания угол 60°. Найдите расстояние между скрещивающимися ребрами пирамиды.



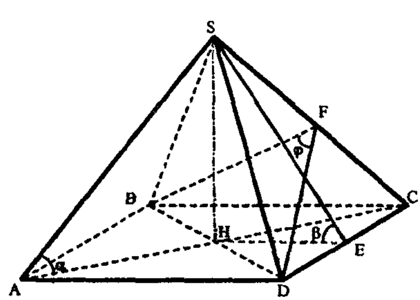
Решение.	Комментарии
1. $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin\alpha=\sqrt{\frac{3}{7}}$	$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\beta$; $\sin\alpha=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$
2. $FD=\frac{14\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{\frac{3}{7}}=3\sqrt{7}$	$FD=AD\cdot\sin\alpha$

Ответ: $3\sqrt{7}$.

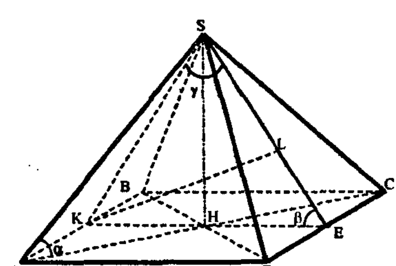
Пример 13.

Все ребра правильной четырехугольной пирамиды равны a. Найдите:

1. Высоту пирамиды.
2. Объем пирамиды.
3. Угол α между боковым ребром и плоскостью основания.
4. Угол β между плоскостями основания и боковой грани.
5. Угол φ между плоскостями соседних боковых граней.
6. Расстояние между стороной основания и противоположной боковой гранью.
7. Радиус R описанного шара.
8. Радиус r вписанного шара.
9. Угол между плоскостями противоположных боковых граней.



Решение.	Комментарии.
1. По теореме Пифагора получим, что $SH=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{2}}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.	ΔAHS – равнобедренный, прямоугольный ΔSDC – равносторонний треугольник по условию задачи. FD – высота, медиана.
2. $V=\frac{1}{3}S_{осн}\cdot h=\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.	
3. $\mathrm{tg}\alpha=\frac{SH}{AH}=1;\ \alpha=45^\circ$.	
4. $\mathrm{tg}\beta=\frac{SH}{HE}=\sqrt{2};\ \beta=\mathrm{arctg}\sqrt{2}$.	
5. $\sin\frac{\varphi}{2}=\frac{HD}{FD}=\frac{a\sqrt{2}}{2}:\frac{a\sqrt{3}}{2}=\sqrt{\frac{2}{3}}$ $\sin\varphi=\frac{2\sqrt{2}}{3};\ \varphi=\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}$.	$\cos\frac{\varphi}{2}=\sqrt{\frac{1}{3}};\ \sin\varphi=2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}$
6. $KL=a\cdot\sin\beta=a\sqrt{\frac{2}{3}}$.	Плоскость KSE перпендикулярна плоскости SDC. Отрезок KL перпендикулярен линии их пересечения, следовательно, перпендикулярен плоскости SDC. Проекция отрезка KL на плоскость основания — прямая $KE\perp AB$. Следовательно, длина KL есть расстояние между ребром основания и противолежащей боковой гранью.
7. $R=\frac{\sqrt{2}a}{2}$.	Радиус шара, описанного возле данной пирамиды, равен высоте этой пирамиды, т.к. все вершины равноудалены от центра основания пирамиды.
8. $r=\frac{a\sqrt{2}}{2\left(\sqrt{3}+1\right)}$.	$r=\frac{3V}{S_{полн.}}$; $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$; $S_{полн.}=a^2+4\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=a^2\left(1+\sqrt{3}\right)$
9. Искомый угол — угол SKE. $\angle SKE=\pi-2\beta=\pi-2\mathrm{arctg}\sqrt{2}$ $\angle KSE=\mathrm{arctg}2\sqrt{2}$	$\mathrm{tg}(\pi-2\beta)=-\mathrm{tg}2\beta=\frac{2\mathrm{tg}\beta}{\mathrm{tg}^2\beta-1}$



Пример 14.

Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 8, апофема пирамиды равна 10. Найдите площадь сечения пирамиды, проведенной через середину высоты, параллельно плоскости основания.

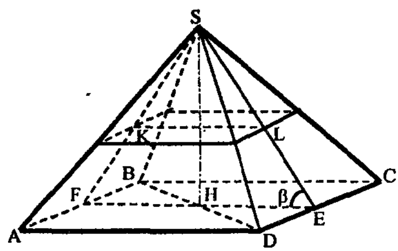
Решение.

Плоскость, параллельная основанию пирамиды, отсекает пирамиду, подобную исходной. Коэффициент подобия равен отношению двух любых сходственных отрезков в пирамиде. Отношение площади сечения к плоскости основания равно квадрату коэффициента подобия.

Так как основание правильной четырехугольной пирамиды — квадрат, то искомое сечение — также квадрат.

По теореме Пифагора $HE=\sqrt{100-64}=6$.

Следовательно, $KL=6$; $S_{сеч}=36$.



Ответ: 36.

Пример 15.

Боковая грань правильной четырехугольной пирамиды образует с плоскостью основания угол, равный 60°. Найдите угол между боковыми гранями.

Решение.

Воспользуемся соотношением между данным и искомым углами. $\cos\frac{\varphi}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\beta$. Получим, что $\cos\frac{\varphi}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}$.

Найдем $\cos\varphi=2\cos^2\frac{\varphi}{2}-1=2\cdot\frac{6}{16}-1=-\frac{1}{4}$.

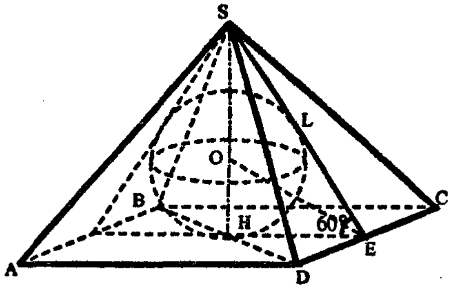
Получим, что $\varphi=\pi-\arccos\frac{1}{4}$.

Ответ: $\varphi=\pi-\arccos\frac{1}{4}$.

Пример 16.

Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна 10. Боковая грань образует с плоскостью основания угол 60°. Найдите радиус вписанной в пирамиду сферы.

Р е ш е н и е .



Центр шара, вписанного в правильную пирамиду, лежит на высоте пирамиды.

Апофема и прямая, проходящая через центр основания — касательные, проведенные к шару.

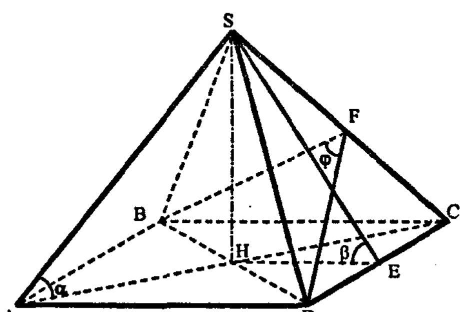
$$r = OH = HE \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} . \ HE = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5 . \ r = \frac{5\sqrt{3}}{3} .$$

Ответ: $r = \dfrac{5\sqrt{3}}{3}$.

Пример 17.

Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна 8, двугранный угол при боковом ребре равен $\dfrac{2\pi}{3}$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

Р е ш е н и е .



Пусть H — центр основания, E — середина ребра CD, а F — точка на ребре SC такая, что $FD \perp SC$, $FB \perp SC$. Тогда угол BFD — линейный угол двугранного угла при боковом ребре. Искомая площадь боковой поверхности пирамиды равна $S_{бок.} = 4 \cdot \frac{1}{2} a \cdot h_a$, где h_a — апофема боковой грани. Найдем ее длину.

Пусть угол между плоскостями боковой грани и основания равен β. Тогда $\sin\beta = \sqrt{2}\cos\frac{\varphi}{2}$. Из треугольника SHE находим:

$h_a = \frac{HE}{\cos\beta} = \frac{a}{2\cos\beta}$.

Следовательно,

$$h_a^2 = \frac{a^2}{4\cos^2\beta} = \frac{a^2}{4(1-\sin^2\beta)} = \frac{a^2}{4\left(1-2\cos^2\frac{\varphi}{2}\right)} = \frac{a^2}{-4\cos\varphi}.$$

Отсюда $h_a = \frac{a}{2\sqrt{-\cos\varphi}}$. Тогда $S_{бок} = 2 \cdot a \cdot h_a = \frac{a^2}{\sqrt{-\cos\varphi}}$.

Подставляя числовые данные, получаем

$$S_{бок} = \frac{64}{\sqrt{-\cos\frac{2\pi}{3}}} = \frac{64}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = 64\sqrt{2}.$$

Ответ: $64\sqrt{2}$.

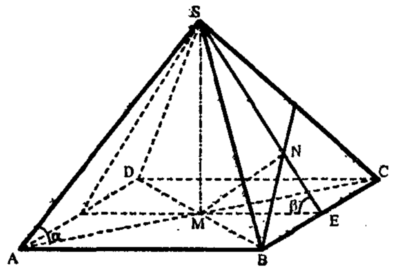
Пример 18.

В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ длины всех ребер равны 1. Точка M лежит в плоскости основания пирамиды и одинаково удалена от ребер AS и SD. Кроме того $MS = MC$. Точка N лежит в плоскости грани BSC и также одинаково удалена от тех же ребер AS и SD, причем $NS = NC$. Найдите площадь треугольника BMN.

Решение.

1. Определим расположение точки M.

В плоскости ASD есть единственная точка, принадлежащая плоскости основания и равноудаленная от ребер AS и SD — это основание F высоты SF треугольника ASD. Пусть $FE \parallel AB$. Прямая FE проходит через середину основания. Докажем, что любая точка прямой FE будет равноудалена от ребер AS и SD.



Выберем произвольную точку, принадлежащую прямой FE — точку M. Соединим точку M с вершиной пирамиды и рассмотрим треугольники ASM и DSM. Эти треугольники равны по трем сторонам: $AS = SD$ — как боковые ребра правильной треугольной пирамиды; $AM = MD$, т.к. точка M принадлежит серединному перпендикуляру FE к отрезку AD; SM — общая сторона.

Расстоянием от точки M до ребер AS и SD являются высоты равных треугольников, проведенные к равным соответственным сторонам этих треугольников. Следовательно, эти расстояния равны, что и требовалось доказать.

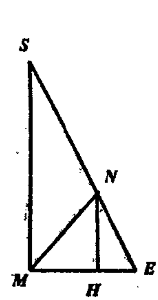
Аналогично, любая точка, принадлежащая плоскости FSE, также будет равноудалена от ребер AS и SD.

Так как все ребра данной пирамиды равны, то основание высоты пирамиды равноудалено от всех вершин пирамиды, и поскольку она принадлежит плоскости FSE, то середина основания и есть точка M.

2. Определим расположение точки N.

Плоскость FSE пересекает плоскость SBC по высоте равностороннего треугольника SE. Следовательно, точка N принадлежит SE. Так как N равноудалена от вершин S и C, она лежит на серединном перпендикуляре к стороне равностороннего треугольника, т.е. на высоте этого треугольника. Таким образом, точка N — точка пересечения высот равностороннего треугольника SBC.

3. Найдем стороны и площадь треугольника BMN.



$BN=\frac{\sqrt{3}}{3}$, т.к BN — это $\frac{2}{3}$ высоты равностороннего треугольника, сторона которого равна 1. $BM=\frac{\sqrt{2}}{2}$, как половина диагонали основания. Найдем MN.

Проведем из точки N перпендикуляр $NH\perp ME$. Треугольники NHE и SME подобны, так как это прямоугольные треугольники, имеющие общий острый угол.

Поскольку $\frac{NE}{SE}=\frac{1}{3}$, то $NH=\frac{1}{3}SM=\frac{\sqrt{2}}{6}$. $MH=\frac{2}{3}ME=\frac{1}{3}$.

Тогда по теореме Пифагора получим, что

$$MN^2=\frac{1}{18}+\frac{1}{9}=\frac{1}{6}.\ MN=\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Заметим теперь, что $BM^2=MN^2+NB^2$, т.е. треугольник BNM – прямоугольный. Тогда

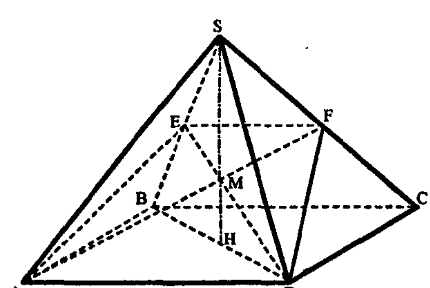
$$S_{BMN}=\frac{1}{2}MN\cdot NB=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{6\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{2}}{12}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{12}$.

Пример 19.

Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ с вершиной S равна $24\sqrt{3}$. Высота пирамиды равна 108. Точка E — середина бокового ребра SB. Найдите расстояние от центра шара, описанного около пирамиды, до плоскости ADE.

Решение.



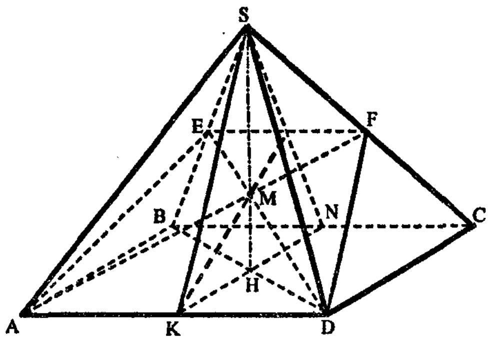
1. Построение сечения.

Плоскость, проходящая через точки A, D, E, пересекает плоскость BSD по отрезку DE — медиане данного треугольника. Высота SH также является медианой этого треугольника. Следовательно, точка M, являющаяся точкой пересечения медиан треугольника BSD, принадлежит плоскости сечения.

В плоскости треугольника ASC находятся две точки, принадлежащие плоскости сечения — это точки A и M. Следовательно, плоскость сечения пересекает плоскость треугольника ASC по отрезку AF, проходящему через точку M. Но $SM : MN = 2 : 1$. Следовательно, AF — медиана, а точка F — середина SC.

Таким образом, сечение пирамиды $AEFD$ есть трапеция, причем $EF = \frac{1}{2} AB$.

2. Нахождение расстояния.

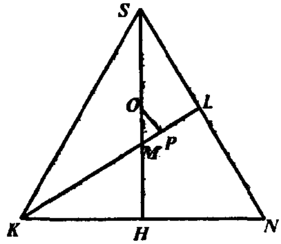


Центр шара, описанного около правильной пирамиды, лежит на ее высоте. Проведем апофему SK пирамиды. Тогда KH — ее проекция, следовательно, $AD \perp SK$ и $AD \perp KH$ (теорема о трех перпендикулярах Расстоянием от центра шара до плоскости сечения будет длина перпендикуляра, проведенного из центра шара на линию пересечения плоскости (KSN) и плоскости сечения.

Найдем радиус описанного шара:

$$R_{ш} = \frac{a^2 + 2h^2}{4h} = \frac{576 \cdot 3 + 2 \cdot 108^2}{4 \cdot 108} = 4 + 54 = 58 .$$

Расстояние от вершины пирамиды до центра шара меньше, чем расстояние от вершины до точки M.



Треугольники KMH и OMP подобны, поэтому $\dfrac{OP}{KH}=\dfrac{OM}{KM}$.

$$OM = SM - SO = \frac{2}{3}SH - SO = 72 - 58 = 14;\ MH = \frac{1}{3}SH = 36;$$

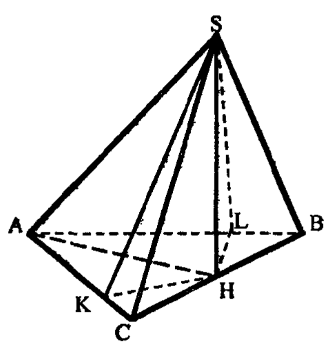
$$KM = \sqrt{KH^2 + MH^2} = 24\sqrt{3};\ OP = \frac{12\sqrt{3}\cdot 14}{24\sqrt{3}} = 7.$$

Ответ: 7.

Пример 20.

Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, боковые стороны которого равны b и образуют угол α. Грань пирамиды, содержащая основание равнобедренного треугольника, перпендикулярна плоскости основания. Две другие грани образуют с плоскостью основания угол φ. Найдите объем пирамиды.

Решение.



Так как боковая грань перпендикулярна плоскости основания пирамиды, то высота пирамиды принадлежит этой грани и является ее высотой.

Проведем высоту SH и опустим перпендикуляры из ее основания на боковые стороны основания: $HL \perp AB$, $HK \perp AC$. По теореме о трех перпендикулярах получим, что $SL \perp AB$, $SK \perp AC$. Тогда углы SLH и SKH — линейные углы двугранных углов между плоскостями боковых граней основания.

Получим, что $\Delta SLH = \Delta SKH$ по общему катету и противолежащему ему острому углу.

Следовательно, точка H равноудалена от боковых сторон равнобедренного треугольника и является основанием биссектрисы и основанием высоты треугольника BAC, проведенной к его основанию.

Поэтому:

$$AH = b\cdot\cos\frac{\alpha}{2},\ HL = AH\cdot\sin\frac{\alpha}{2} = b\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}b\sin\alpha,$$

$$SH = HL\cdot\mathrm{tg}\varphi = \frac{1}{2}b\sin\alpha\cdot\mathrm{tg}\varphi,\ S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}b^2\sin\alpha,$$

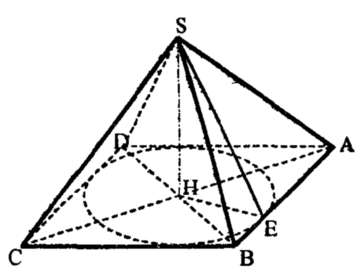
$$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}b^2\sin\alpha\cdot\frac{1}{2}b\sin\alpha\cdot\mathrm{tg}\varphi = \frac{b^3}{12}\cdot\sin^2\alpha\cdot\mathrm{tg}\varphi.$$

Ответ: $\frac{b^3}{12}\cdot\sin^2\alpha\cdot\mathrm{tg}\varphi$.

Пример 21.

Основанием пирамиды служит ромб, сторона которого равна 6, острый угол 30°. Двугранные углы боковых граней с плоскостью основания равны 60°. Найдите полную поверхность пирамиды.

Решение.



Так как боковые грани пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания, то воспользуемся теоремой о площади проекции плоской фигуры на плоскость.

Получим, что в данном случае $S_{осн.} = S_{бок} \cos 60° = \frac{1}{2} S_{бок}$. Следовательно, $S_{бок} = 2S_{осн}$, а $S_{полн} = 3S_{осн}$.

Найдем площадь основания: $S_{осн} = 6^2 \sin 30° = 18$.

Тогда $S_{полн} = 54$.

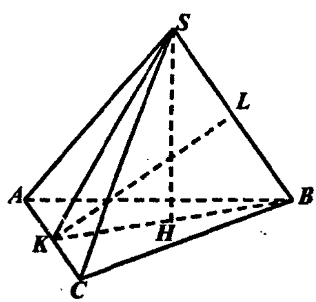
Ответ: 54.

Пример 22.

Гранями треугольной пирамиды являются равные равнобедренные треугольники. Основание каждого треугольника равно a, а противолежащий ему угол α. Найдите объем пирамиды.

Решение.

Пусть $SH = h$ — высота пирамиды. Так как треугольник ASC равнобедренный, то основание высоты пирамиды будет принадлежать серединному перпендикуляру к стороне AC. Но треугольник ABC также равнобедренный. Следовательно, основание высоты пирамиды лежит на высоте треугольника ABC, проведенной к основанию.



Таким образом, BH есть проекция бокового ребра SB на плоскость основания, поэтому ребра SB и AC взаимно перпендикулярны и по условию задачи равны a.

Треугольник SKB также равнобедренный, т.к. $SK = KB$ (высоты равных треугольников, проведенные к соответственно равным сторонам). Проведем высоту этого треугольника KL. Длина отрезка KL будет равна расстоянию между скрещивающимися ребрами данного тетраэдра.

Воспользуемся формулой $V_{тетр} = \frac{1}{6} abd \cdot \sin\alpha$, где a, b — длины скрещивающихся ребер тетраэдра, d — расстояние между ними, α — угол между прямыми, содержащими данные ребра. В данном случае $V_{иск}=\frac{1}{6}a^2\cdot KL$.

Найдем KL: $BK=\frac{a}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, $BL=\frac{a}{2}$, $KL=\frac{a}{2}\sqrt{\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-1}$.

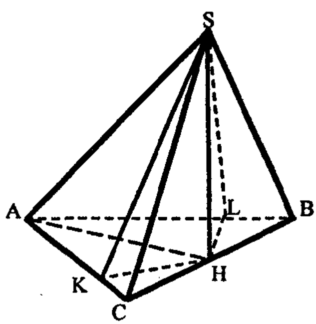
Следовательно, $V=\frac{1}{12}a^3\sqrt{\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-1}$.

Ответ: $V=\frac{1}{12}a^3\sqrt{\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-1}$.

Пример 23.

Основанием пирамиды является правильный треугольник. Одна из боковых граней перпендикулярна плоскости основания, а две другие составляют с основанием угол α. Найдите углы наклона боковых ребер к плоскости основания пирамиды.

Решение.



Так как боковая грань перпендикулярна плоскости основания пирамиды, то высота SH пирамиды является и высотой этой грани.

Пусть $HL\perp AB$, $HK\perp AC$. По теореме о трех перпендикулярах получим, что и $SL\perp AB$, $SK\perp AC$. Тогда углы SLH и SLH — линейные углы двугранных углов между плоскостями и плоскостью боковых граней основания.

Получим, что $\triangle SLH=\triangle SKH$ по общему катету и противолежащему ему острому углу.

Следовательно, точка H равноудалена от боковых сторон равностороннего треугольника и является основанием биссектрисы, равно как и основанием высоты треугольника BAC, проведенной к основанию.

Таким образом, H — середина стороны равностороннего треугольника.

Но тогда, если сторона треугольника равна a, то

$$AH=\frac{a\sqrt{3}}{2},\quad HL=\frac{a\sqrt{3}}{4},\ SH=\frac{a\sqrt{3}}{4}\operatorname{tg}\alpha.$$

$$\operatorname{tg}\angle SAH=\frac{SH}{AH}=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha;\ \angle SAH=\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha\right).$$

$$\operatorname{tg}\angle SBH=\frac{SH}{BH}=\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\alpha;$$

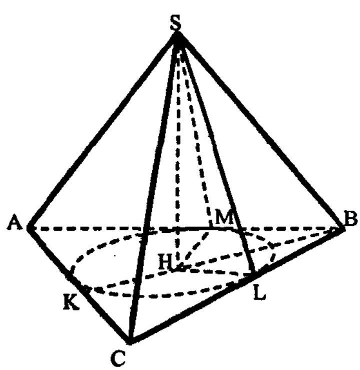
$$\angle SBN=\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\alpha\right).$$

Ответ: $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha\right);\ \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\alpha\right).$

Пример 24.

Основание пирамиды — треугольник со сторонами 10, 10, 12. Площади боковых граней соответственно равны 100, 100, 120. Найдите высоту пирамиды.

Решение.



Из условия задачи следует, что каждая из высот боковых граней, проведенных к сторонам основания, равна 20. Следовательно, боковые грани пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания пирамиды. А основание высоты пирамиды совпадает с центром окружности, вписанной в треугольник ABC.

Треугольник ABC равнобедренный. Найдем высоту, проведенную к основанию: $BK=\sqrt{100-36}=8$.

Найдем радиус окружности, вписанной в основание пирамиды: $r=\frac{2S}{P}=\frac{12\cdot 8}{10+10+12}=3$.

Из прямоугольного треугольника KHS получим, что

$$SH=\sqrt{400-9}=\sqrt{391}.$$

Ответ: $\sqrt{391}$.

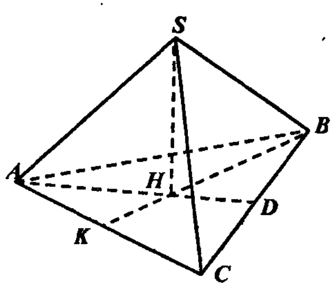
Пример 25.

В пирамиде $SABS$ ребра AS и BC взаимно перпендикулярны. Углы наклона боковых граней ASB и BSC к плоскости основания равны между собой. Определите объем пирамиды, если $AB=15$, $AC=13$, $BC=14$, $SB=10{,}5$.

Решение.

Так как $AS\perp BC$, то основание H высоты пирамиды SH лежит на высоте AD треугольника ABC. Поскольку грани ASB и BSC одинаково наклонены к плоскости основания пирамиды, то точка H принадлежит биссектрисе BK треугольника.

Следовательно, основание высоты пирамиды есть точка пересечения высоты AD и биссектрисы BK треугольника ABC.



Вычислим площадь основания по формуле Герона: $S=84$. Тогда получаем, что $AD=12$. Из прямоугольного треугольника ABD получим, что $BD=9$.

Используя далее свойство биссектрисы угла треугольника, получаем, что $\frac{DH}{HA}=\frac{BD}{AB}=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$. Обозначив $DH=x$, получим, что $\frac{x}{12-x}=\frac{3}{5}\Leftrightarrow 5x=36-3x\Leftrightarrow x=4{,}5$.

Тогда $BH^2=81+\frac{81}{4}=\frac{81\cdot 5}{4}$.

Из прямоугольного треугольника SHB получим, что

$$SH=\sqrt{SB^2-BH^2}=\sqrt{\frac{441}{4}-\frac{405}{4}}=\sqrt{\frac{36}{4}}=3.$$

Вычислим объем пирамиды: $V=\frac{1}{3}S\cdot SH=84$.

Ответ: 84.

Пример 26.

Площадь основания цилиндра равна Q, а площадь его осевого сечения S. Найдите объем цилиндра.

Решение.

Площадь осевого сечения равна произведению диаметра основания на высоту цилиндра.

Поэтому получим $\begin{cases}\pi r^2=Q,\\ 2rh=S\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\pi r=\sqrt{\frac{Q}{\pi}},\\ rh=S.\end{cases}$

Перемножив полученные значения, получим, что

$$V=\pi r^2h=S\sqrt{\frac{Q}{\pi}}.$$

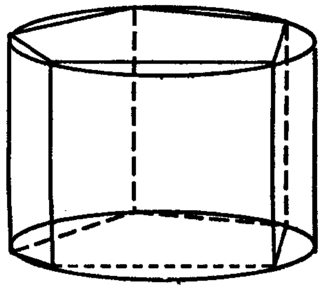
Ответ: $S\sqrt{\frac{Q}{\pi}}$.

Пример 27.

В цилиндр вписана правильная n-угольная призма. Найдите отношение объемов призмы и цилиндра, если

а) $n=3$;
б) $n=4$;
в) $n=6$;
г) $n=8$;
д) n — произвольное целое число.

Решение



Призма, вписанная в цилиндр

Так как первые 4 задачи являются частными случаями пятой, то, решив ее, мы решим и все остальные.

Так как призма вписана в цилиндр, то их высоты равны. Поэтому отношение объемов равно отношению площадей их оснований. Имеем: $S_{цил} = \pi r^2$, а площадь правильного n-угольника выражается через радиус описанной около него окружности как $S_n = \frac{n}{2} r^2 \sin\frac{2\pi}{n}$. Следовательно, $\frac{V_n}{V_{цил}} = \frac{n \cdot \sin\frac{2\pi}{n}}{2\pi}$.

Например, для $n = 3$, получим: $\frac{V_3}{V_{цил}} = \frac{3}{2\pi}\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$.

Для $n = 4$ $\frac{V_4}{V_{цил}} = \frac{4 \cdot \sin\frac{2\pi}{4}}{2\pi} = \frac{4}{2\pi} = \frac{2}{\pi}$.

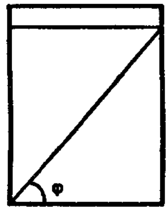
Для $n = 6$ $\frac{V_6}{V_{цил}} = \frac{6 \cdot \sin\frac{2\pi}{6}}{2\pi} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$

Для $n = 8$ $\frac{V_8}{V_{цил}} = \frac{8 \cdot \sin\frac{2\pi}{8}}{2\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$

Пример 28.

Через точку основания цилиндра проведена плоскость, составляющая угол φ с плоскостью основания. Найдите отношение объема отсеченной части к объему цилиндра, если высота цилиндра равна h, а радиус основания R.

Решение.



Объем отсеченной части составляет половину объема цилиндра, высота которого равна $2R \cdot \operatorname{tg}\varphi$.

Следовательно, объем отсеченной части цилиндра будет равен $\pi R^2 \operatorname{tg}\varphi$. Тогда искомое отношение будет равно

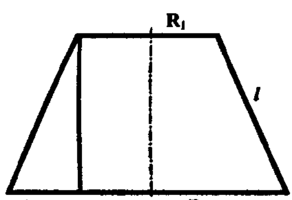
$$\frac{V}{V_{цил}} = \frac{\pi R^2 \operatorname{tg}\varphi}{\pi R^2 h} = \frac{R \operatorname{tg}\varphi}{h}.$$

Ответ. $\dfrac{R\operatorname{tg}\varphi}{h}$.

Пример 29.

Радиусы оснований усеченного конуса равны 3 и 6, а образующая равна 5. Найдите объем конуса.

Решение.



По теореме Пифагора получим, что $H^2 = l^2 - (R_2 - R_1)^2$

Объем усеченного конуса будет равен

$$V = \frac{1}{3}\pi\sqrt{l^2 - (R_2 - R_1)^2}\,(R_2^2 + R_2R_1 + R_1^2) = \frac{\pi}{3}\sqrt{25 - 9}\,(36 + 18 + 9) = 84\pi.$$

Ответ: 84π.

Пример 30.

Шар и цилиндр имеют равные объемы, а диаметр шара равен диаметру основания цилиндра. Выразите высоту цилиндра через радиус шара.

Решение.

Обозначим R — радиус шара и основания цилиндра, H — высота цилиндра. Получим, что $\frac{4}{3}\pi R^3 = \pi R^2 H \Leftrightarrow H = \frac{4}{3}R$.

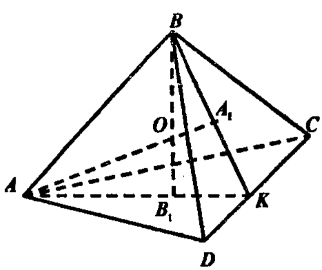
Ответ: $H = \frac{4}{3}R$.

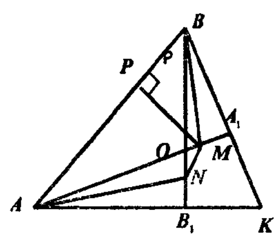
Пример 31.

В пространстве расположены четыре шара одинакового диаметра и четыре другого. Каждый шар касается трех такого же радиуса и трех – другого. Найдите отношение объема меньшего шара к объему большего шара.

Решение.

Центры четырех шаров одинакового радиуса являются вершинами правильного тетраэдра, ребро которого равно диаметру одного шара. Пусть радиусы больших шаров равны R. Пусть их центры расположены в вершинах правильного тетраэдра $ABCD$, ребро которого равно $2R$. Центр каждого из четырех шаров меньшего радиуса $r(r < R)$ равноудален от трех вершин этого тетраэдра, а значит, все центры меньших шаров расположены на высотах этого тетраэдра или на их продолжениях.





Проведем две высоты — AA_1 и BB_1, и рассмотрим треугольник ABK, получающийся в сечении тетраэдра плоскостью, проходящей через эти две высоты. Центры этих двух шаров радиуса r лежат на прямых AA_1 и BB_1. Возможны два случая. Оба центра расположены на отрезках AO и BO или оба — вне этих отрезков.

Начнем со второго – правильного — случая. Обозначим через M и N центры шаров радиуса r.

Тогда $ABMN$ — равнобокая трапеция, ее боковые стороны $AN = BM = R + r$, основания $AB = 2R$, $MN = 2r$. Если угол $ABB_1 = \varphi$, то $\sin\varphi = \frac{AB_1}{AB} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. B_1 — центр правильного треугольника ADC, $AB_1 = \frac{2R}{\sqrt{3}}$. Опустим из точки M перпендикуляр MP на AB. Понятно, что высота трапеции — MP — равна сумме высот равнобедренных треугольников AOB и MON, проведенных из точки O. Тогда $PM = (R + r)\operatorname{tg}\varphi = (R + r)\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Следовательно, $PB = PM = (R + r)\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Таким образом, оказывается, что треугольник PBM — равнобедренный прямоугольный треугольник, следовательно,

$$(R + r)\frac{1}{\sqrt{2}} = R - r.$$

Получим, что $\frac{r}{R} = 3 - 2\sqrt{2}$. Тогда $\frac{V_M}{V} = \left(3 - 2\sqrt{2}\right)^3$.

Ответ: $\frac{V_M}{V} = \left(3 - 2\sqrt{2}\right)^3$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

24. Диагональ прямоугольного параллелепипеда составляет угол α с плоскостью боковой грани и угол β с плоскостью основания. Найдите объем параллелепипеда, если его высота равна h.

25. Основанием наклонного параллелепипеда является прямоугольник со сторонами a и b. Боковое ребро равно c и составляет со смежными сторонами основания угол, равный φ. Найдите объем параллелепипеда.

26. Найдите объем прямой В прямой призме $ABCA_1B_1C_1$ $\angle BAC = 120°$, $AB = 5$, $AC = 3$, если, $AB = 5$, $AC = 3$, а наибольшая из площадей боковых граней равна 35. Найдите объем призмы.

27. Основанием прямой призмы является параллелограмм. Через сторону основания, равную a, и противолежащую ей сторону другого основания проведено сечение, составляющее угол β с плоскостью основания. Площадь сечения равна Q. Найдите объем данной призмы.

28. Основанием наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равносторонний треугольник ABC, сторона которого равна a. Вершина A_1 проектируется в точку пересечения медиан треугольника ABC. Ребро AA_1 составляет с плоскостью основания угол 45°. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

29. Дана правильная треугольная пирамида $SABC$, сторона основания которой $AB=3$, боковое ребро $AS=2\sqrt{3}$. BM — медиана основания, AR — высота треугольника SAB. Найдите MR.

30. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, боковая грань образует с плоскостью основания угол 60°. Найдите объем пирамиды.

31. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, боковое ребро образует с плоскостью основания угол 60°. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

32. Найдите площадь сечения, проведенного через высоту и одно из ребер правильного тетраэдра, если ребро тетраэдра равно a.

33. Вычислите объем правильного тетраэдра, если радиус окружности, описанной около грани, равен R.

34. Апофема правильной четырехугольной пирамиды вдвое больше стороны основания. Найдите а) тангенс угла наклона бокового ребра к плоскости основания пирамиды; б) тангенс угла между плоскостями боковой грани и снования пирамиды.

35. Диагональное сечение правильной четырехугольной пирамиды равновелико основанию. Найдите площадь основания пирамиды, если ее боковое ребро равно 5.

36. В тетраэдре $SABC$ через точку M проведено сечение, параллельное ребру AB и пересекающее ребро AC. Известно, что $AM{:}M = 2:3$, а отношение объемов получившихся частей равно $12:13$. В каком отношении секущая плоскость делит ребро AC, считая от точки A.

37. Плоскость, параллельная скрещивающимися ребрам AB и SC, делит ребро AS в отношении $p{:}q$, считая от вершины A. В каком отношении эта плоскость делит объем тетраэдра?

38. Основание пирамиды $PABCD$ — параллелограмм $ABCD$. Точка M расположена на ребре, причем $PM{:}\ PC = 1:2$. Плоскость сечения проходит через точку M параллельно прямым AP и BD. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?

39. Основанием пирамиды $SABCD$ служит параллелограмм $ABCD$, угол A которого равен $60°$. Боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом β. Найдите угол наклона ребра SA к плоскости основания.

40. Основание пирамиды – равнобедренный треугольник с боковой стороной, равной a, и углом при вершине $120°$. Все боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом $60°$. Найдите объем пирамиды.

41. Основанием пирамиды является прямоугольный треугольник, катеты которого равны 24 и 18. Каждое боковое ребро равно 25 дм. Пирамида пересечена плоскостью, параллельной плоскости основания и делящ ей ребро пополам. Найдите объем полученной усеченной пирамиды.

42. Основанием пирамиды $DABC$ является треугольник, со сторонами $AB = 20$, $AC = 29$, $BC = 21$. Грани DAB и DAC перпендикулярны к плоскости основания, а грань DBC составляет с ним угол $60°$. Найдите объем пирамиды.

43. Через каждую вершину тетраэдра проведена плоскость, параллельная противоположной грани. Найдите отношение объема образованного таким образом нового тетраэдра к объему данного тетраэдра.

44. Прямоугольник с площадью S и углом α между диагоналями вращается вокруг оси, проходящей через его вершину параллельно диагонали. Найдите объем полученного тела вращения.

45. Два шара одинакового радиуса расположены так, что центр одного из них лежит на поверхности другого. Найдите отношение объема общей части шаров к объему одного шара.

46. Диаметр шара разделен на три равные части и через точки проведены плоскости, перпендикулярные к диаметру. Найдите объем шарового слоя, если радиус шара равен R.

Тренировочные тесты

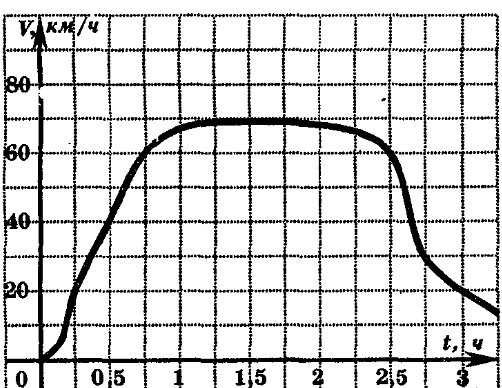
ВАРИАНТ 1

Часть 1

Ответом на задания В1–В12 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и десятичную запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

B1. В июне килограмм черешни стоит 130 рублей. Юлия купила 4 кг черешни. Сколько рублей сдачи получила она с 1000 рублей?

B2. Судно на подводных крыльях «Олимпия» может плыть со скоростью 70 км/ч. При скорости 20 км/ч корпус судна поднимается над поверхностью воды и оно движется, опираясь на подводные крылья. Определите по графику, сколько часов корабль плыл на подводных крыльях. (На оси абсцисс отмечено время движения в часах, на оси ординат – скорость в километрах в час).



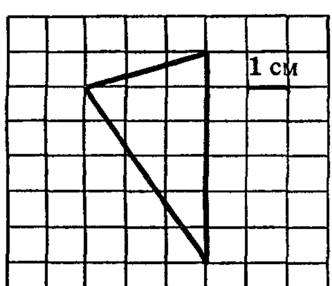
B3. Найдите корень уравнения $7^{3-x} = 49$.

B4. Найдите $4\sin 2\alpha$, если $\sin\alpha = 0{,}6$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

B5. Торговая фирма планирует приобрести 7500 л молока у одного из трех поставщиков. Цены и условия доставки приведены в таблице. Сколько рублей придется заплатить за самую дешевую покупку с доставкой?

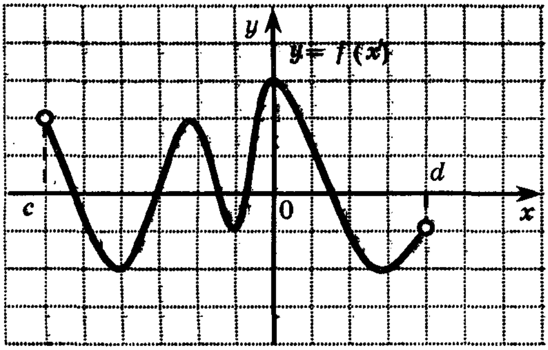
Поставщик	Стоимость молока (руб. за л)	Стоимость доставки	Дополнительные условия
1	13	9000	
2	14	8000	При заказе на сумму больше 100000 руб. доставка бесплатно
3	15	8000	При заказе на сумму больше 110000 руб. доставка бесплатно

B6. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображен треугольник (см. рис.). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.



B7. Найдите значение выражения $\frac{70}{4^{\log_4 7}}$.

B8. Функция $y=f(x)$ определена на промежутке $(c; d)$. На рисунке изображен график ее производной. Найдите число точек минимума функции $y=f(x)$ на промежутке $(c; d)$.



B9. Камень столкнули с уступа и он падает в пропасть. До падения камня на дно пропасти расстояние, на котором он находится от дна пропасти, зависит от времени: $h(t)=146+5t-9t^2$ (h — расстояние от дна пропасти в метрах, t — время в секундах, прошедшее с начала падения). Сколько секунд камень будет находиться на расстоянии не менее 120 м от дна пропасти?

B10. Объем конуса 14 м^3. У второго конуса высота в 2 раза меньше, а радиус основания в 3 раза больше, чем у первого. Найдите объем второго конуса.

B11. Найдите точку минимума функции

$$f(x)=\frac{10}{3}x^3-\frac{41}{2}x^2+21x-17.$$

B12. Самолет летит из одного города в другой со средней скоростью 780 км/ч, а обратно — со средней скоростью 910 км/ч. Найдите среднюю скорость движения самолета на пути из одного города до другого и обратно.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания С1–С6 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.

С1. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2\sqrt{3}\sin x = y \\ y^2+2y+\sqrt{y^2+2y-6}=18. \end{cases}$

С2. Дана правильная четырехугольная призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в которой высота в три раза больше стороны основания. На диагональ A_1C из вершины A и середины ребра AB опущены перпендикуляры. В каком отношении (считая от вершины A_1) основания этих перпендикуляров делят диагональ A_1C?

С3. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{8-x^3}-4+x}{x+3}\le x.$

С4. На стороне BA угла ABC, равного 150°, взята такая точка K, что $AK=4$ и $BK=2$. Найдите радиус окружности, проходящей через точки A, K и касающейся прямой BC.

С5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $5x+|4x-a|+|2x-1|>5$ выполняется для любого x.

С6. Решите в целых числах уравнение $\sqrt{x-\dfrac{1}{5}}+\sqrt{y-\dfrac{1}{5}}=\sqrt{5}.$

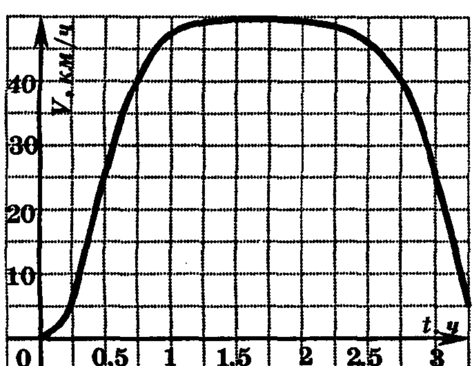
ВАРИАНТ 2

Часть 1

Ответом на задания В1–В12 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и десятичную запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

B1. Друзья купили 4 порции мороженого по 27 рублей. Сколько рублей сдачи получили они с 500 рублей?

B2. Судно на подводных крыльях «Восход» может плыть со скоростью 60 км/ч. При скорости 25 км/ч корпус судна поднимается над поверхностью воды и оно движется, опираясь на подводные крылья. Определите по графику, сколько минут корабль плыл на подводных крыльях. (На оси абсцисс отмечено время движения в часах, на оси ординат — скорость в километрах в час).



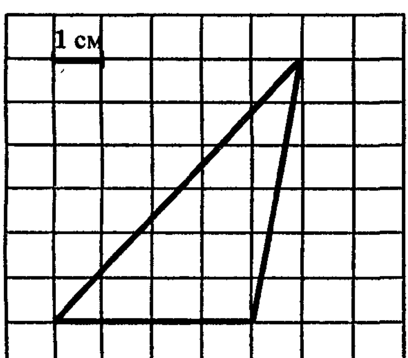
B3. Найдите корень уравнения $6^{5-x}=216$.

B4. Найдите $6\sin 2\alpha$, если $\cos\alpha=0{,}8$, $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$.

B5. Торговая фирма планирует приобрести 6850 л минеральной воды у одного из трех поставщиков. Цены и условия доставки приведены в таблице. Сколько рублей придется заплатить за самую дешевую покупку с доставкой?

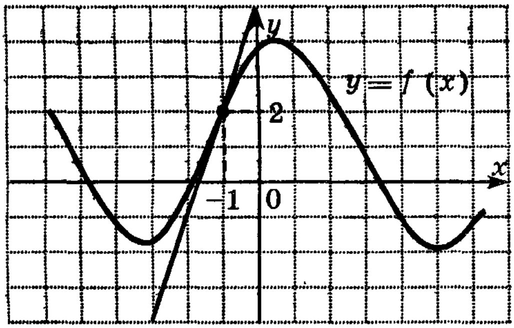
Поставщик	Стоимость минеральной воды (руб. за л)	Стоимость доставки	Дополнительные условия
1	9	13000	При заказе на сумму больше 60000 руб. доставка бесплатно
2	8	12000	При заказе на сумму больше 55000 руб. доставка бесплатно
3	7	14000	

B6. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображен треугольник (см. рис.). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.



B7. Найдите значение выражения $\log_{15}25+\log_{15}9$.

B8. На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и касательная к этому графику в точке с абсциссой -1. Найдите значение производной $f'(x)$ в точке -1.



B9. Камень столкнули с уступа и он падает в пропасть. До падения камня на дно пропасти расстояние, на котором он находится от дна пропасти, зависит от времени: $h(t)=63+6t-9t^2$ (h — расстояние от дна пропасти в метрах, t — время в секундах, прошедшее с начала падения). Сколько секунд камень будет падать?

B10. Во сколько раз увеличится площадь поверхности цилиндра, если его высоту и радиус основания увеличить в 5 раз?

B11. Найдите максимум функции $f(x)=x^3-9x^2+24x-14$.

B12. Две бригады могут уложить асфальт на участке дороги за 10 дней. За сколько дней может уложить асфальт на этом участке дороги вторая бригада, работая отдельно, если за 4 дня она укладывает асфальт на таком же участке, на каком первая за 5 дней?

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания С1–С6 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1. Решите систему уравнений $\begin{cases} 8\sin x + 6\cos y = 2 \\ 6\sin x - 5\cos y = -8. \end{cases}$

C2. Дана правильная четырехугольная призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в которой высота в три раза больше стороны основания. Диагональ A_1C служит ребром двугранного угла, грани которого проходят через вершины B и D. Найдите величину этого угла.

C3. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{8+x^3} - 4 - x}{x-3} \geq x.$

C4. На стороне BA угла ABC, , равного 135°, взята такая точка K, что $AK = 6$ и $BK = 3\sqrt{2} - 3$. Найдите радиус окружности, проходящей через точки A, K и касающейся прямой BC.

C5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $6x + |2x - a| + |5x - 1| > 4$ выполняется для любого x.

C6. Найдите наибольшее натуральное n, для которого каждое из чисел k^k при $k = 1, 2, \ldots, n$ является делителем числа $2013! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2013$.

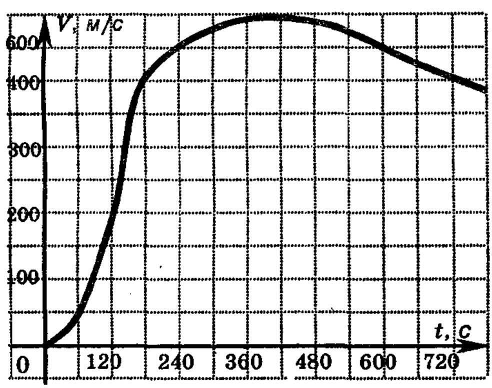
ВАРИАНТ 3

Часть 1

Ответом на задания B1–B12 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и десятичную запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

B1. Антон купил 2 ручки по 13 рублей и 5 карандашей по 7 рублей. Сколько рублей сдачи получил он со 100 рублей?

B2. Скорость распространения звука в воздухе равна 340 м/с. Современный истребитель-перехватчик МиГ-31 летает значительно быстрее. Определите по графику, сколько секунд самолет летел со сверхзвуковой скоростью 400 м/с и более. (На оси абсцисс отмечено время полета в секундах, на оси ординат — скорость в метрах в секунду).



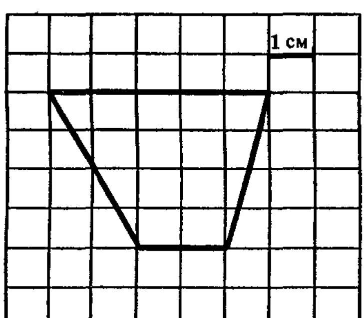
B3. Найдите корень уравнения $\log_3(6-x)=4$.

B4. Найдите $5\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha=-0{,}6$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

B5. Топливная компания планирует приобрести 2850 кг сметаны у одного из трех поставщиков. Цены и условия доставки приведены в таблице. Сколько рублей придется заплатить за самую дешевую покупку с доставкой?

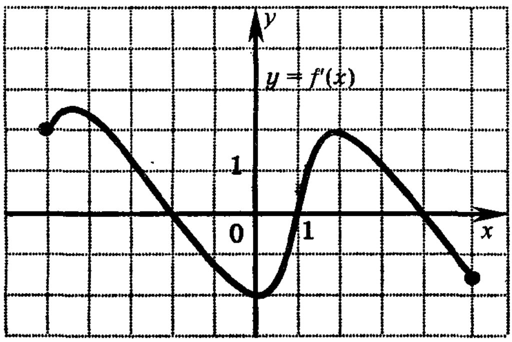
Поставщик	Стоимость сметаны (руб. за кг)	Стоимость доставки	Дополнительные условия
1	52	12000	При заказе на сумму больше 145000 руб. доставка бесплатно
2	53	7000	При заказе на сумму больше 130000 руб. доставка бесплатно
3	49	9900	

B6. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображена трапеция (см. рис.). Найдите площадь этой трапеции. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



B7. Найдите значение выражения $\log_7 245-\log_7 5$.

B8. На рисунке изображен график производной $y=f'(x)$ функции $y=f(x)$, заданной на отрезке $[-5;\ 5]$. Укажите точку минимума функции $y=f(x)$ на отрезке $[-4;\ 4{,}5]$.



B9. Камень столкнули с уступа и он падает в пропасть. До падения камня на дно пропасти расстояние, на котором он находится от дна пропасти, зависит от времени: $h(t)=152+7t-9t^2$ (h — расстояние от дна пропасти в метрах, t — время в секундах, прошедшее с начала падения). Сколько секунд камень будет находиться на расстоянии от дна пропасти не менее 130 м?

B10. Объем шара 17 $м^3$. Радиус второго шара в 2 раза больше, чем радиус первого. Найдите объем второго шара.

B11. Найдите наибольшее значение функции $f(x)=-x^3+1{,}5x^2+18x+11{,}5$ на промежутке $(-1;\ 5)$.

B12. Три переводчика переводят книгу. Первый и второй переводчики, работая вместе, могут перевести книгу за 15 дней, второй и третий — за 10 дней, первый и третий — за 3 дня. За сколько дней могут перевести книгу три переводчика, работая вместе?

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания С1–С6 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.

С1. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3x+5\operatorname{tg}y=-3 \\ 11x+15\operatorname{tg}y=-21 \end{cases}$.

С2. Дана правильная четырехугольная призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в которой высота в два раза меньше стороны основания. На диагональ A_1C из вершин B_1 и D опущены перпендикуляры. В каком отношении (считая от вершины A_1) основания этих перпендикуляров делят диагональ A_1C?

С3. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{25-x^2}+3+x}{x+4}\le 2$.

С4. Прямая отсекает от сторон угла отрезки длиной 5 и 6. Найдите радиус окружности, касающейся этой прямой и сторон угла, если косинус этого угла равен $\dfrac{1}{5}$.

С5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\cos\sqrt{a^2+2a+1-x^2}=1$ имеет ровно шесть различных корней.

С6. Решите в целых числах уравнение $2^x+1=y^2$.

Ответы

ОТВЕТЫ К ЗАДАНИЯМ ГЛАВЫ 1

Номер задания	Ответ
1	2
2	2
3	3
4	1
5	4
6	2
7	1
8	2
9	1
10	4
11	0
12	0,01
13	$\frac{1}{20200}$
14	0
15	0
16	2
17	$y+z$
18	0
19	2
20	1

Номер задания	Ответ
21	2
22	2
23	1
24	3
25	2
26	4
27	0
28	5
29	–2
30	1
31	–1
32	–2
33	92
34	45
35	92
36	–1
37	127
38	$-\sqrt{5}$
39	$\pm\sqrt{3}$
40	$\frac{mn}{m+n}$
41	9 и 35
42	2
43	2
44	1
45	3

Номер задания	Ответ
46	4
47	$(-\infty; 0) \cup (0; 1)$
48	$(4; 4; -4)$
49	-1
50	20
51	5
52	$\left(-\infty; \dfrac{5-2\sqrt{7}}{3}\right)$
53	$(0; 2)$
54	$\sqrt{5}$
55	$12+4\sqrt{5}$
56	3
57	4
58	47
59	210
60	2
61	$-2; 20; 4$
62	$1; 1; 0$
63	4
64	1
65	2
66	4
67	4
68	1
69	7
70	1

Номер задания	Ответ
71	–1
72	$\pm a$
73	$-a; -b$
74	если $a=0$, то корней нет; если $a=1$, то $x=2$; если $a\neq 0$ и $a\neq 1$, то $x=a+1$ или $x=\frac{a+1}{a}$
75	2
76	3
77	2
78	1
79	6
80	1
81	$(-1; -2)$, $(1; -2)$, $(a; 2)$, где $a \in R$
82	$(-\infty; -1] \cup [4; +\infty)$
83	$1; 3; \frac{11}{12}$
84	4
85	2
86	3
87	–4
88	3,5
89	10
90	13
91	$(-7; 7)$, $(-6; 6)$
92	$(11; 9)$
93	3
94	4

Номер задания	Ответ
95	4
96	$-\frac{2}{3}$
97	-2
98	$-2; 3$
99	$7 \pm 4\sqrt{3}$
100	0; 1
101	$-1; 1$
102	1; 2; [5; 6]
103	$5; \frac{3}{7}$
104	$(-\infty; -10) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$;
105	3
106	3
107	2
108	$(-2; 2)$
109	(1; 2)
110	$(-2; 1)$
111	$(-2; -1) \cup (1; 2)$
112	$[-1; 1]$
113	(2; 3]
114	$(-1; 0)$
115	1
116	4
117	3

Номер задания	Ответ
118	3
119	4
120	4
121	1
122	–2

ОТВЕТЫ К ЗАДАНИЯМ ГЛАВЫ 2

Номер задания	Ответ
1	2
2	1
3	3
4	4
5	1
6	1
7	3
8	–6
9	–8
10	5
11	10
12	–6
13	6
14	–20
15	–22
16	0,25
17	1

Номер задания	Ответ
18	0
19	$\frac{b}{a}$
20	0,8
21	1
22	3
23	2
24	2
25	4
26	2
27	2
28	9
29	2
30	6
31	1
32	7
33	$\frac{17}{45}$
34	$\left(10;\ 10\frac{5}{6}\right)$
35	$-\frac{1}{2}$

ОТВЕТЫ К ЗАДАНИЯМ ГЛАВЫ 3

Номер задания	Ответ
1	4

Номер задания	Ответ
2	4
3	3
4	4
5	2
6	3
7	1
8	2
9	729
10	0
11	16
12	0
13	0
14	$\frac{31}{30}$
15	$\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$
16	4
17	2
18	4
19	3
20	2
21	3
22	4
23	–8
24	1,75
25	1
26	2

Номер задания	Ответ
27	11
28	1
29	0
30	$\frac{4}{3}$
31	4
32	3
33	4
34	2
35	3
36	28
37	3
38	2
39	2
40	$-\frac{5}{2}$
41	$\left(-\sqrt{2+3};\ \sqrt{\frac{2}{3}}\right)\cup\left(-\sqrt{2-\sqrt{3}};\ 0\right)$ $\cup\left(0;\ \sqrt{2-\sqrt{3}}\right)\cup\left(\sqrt{\frac{2}{3}};\ \sqrt{2+\sqrt{3}}\right)$
42	$(92-8\sqrt{13};\ 92+8\sqrt{13})$
43	4
44	[27; 81]
45	$(-\infty;\ 1);\ 3$
46	3
47	4
48	4

Номер задания	Ответ
49	3
50	0,03125
51	2
52	0,36
53	2
54	1
55	(0; 0,5)
56	0
57	при $a \in (-\infty; 0] \cup (1; +\infty)$ корней нет; при $a \in (0; 1]$ $x = \log_2 a$

ОТВЕТЫ К ЗАДАНИЯМ ГЛАВЫ 4

Номер задания	Ответ
1	3
2	1
3	3
4	3
5	1
6	4
7	1
8	2
9	24
10	5
11	9
12	5

Номер задания	Ответ
13	12
14	1
15	3
16	17
17	$10^{\frac{1}{1-\lg z}}$
18	$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>1\\y>1\end{cases}\\\begin{cases}0<x<1\\0<y<1\end{cases}\end{array}\right.$
19	$\log_{a_1a_2a_3\ldots a_n} b$
20	1
21	1
22	2
23	2
24	4
25	4
26	3
27	3
28	77
29	4
30	10
31	–0,5
32	0,5
33	2
34	(4; 8)
35	0,5; 1; 1,5

Номер задания	Ответ
36	при $m=0$ $x=3$, при $m=\pm1$ $x=\frac{\pm\left(3\pm2\sqrt{2}\right)}{2}$, при $m=\pm2$ $x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$, при $m=\pm3$ $x=\pm\frac{2}{2}$, при остальных целых m решений нет
37	$1-\sqrt{11+4\sqrt{3}};\ 1+\sqrt{11+4\sqrt{3}}$
38	3
39	4
40	3
41	4
42	1
43	$\{2\}\cup(3;+\infty)$
44	$[3;\ 45]$
45	$(-1;0)\cup\left[\frac{1}{3};3\right)$
46	$\left[-\frac{1}{3};0\right)\cup\left(\frac{1}{5};\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)$
47	$[-2;-1]\cup(2;3)$
48	$(0;8]$
49	$\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2};\frac{1-\sqrt{17}}{2}\right)\cup\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)$
50	2
51	$\left(-\infty;\frac{3}{2}\right]$
52	(5; 4; 4)

Номер задания	Ответ
53	2
54	1
55	3
56	1
57	0
58	2
59	0
60	0
61	$(-\infty;-3]\cup\{-2\}\cup[10;25]$
62	$-1+\sqrt{11+4\sqrt{3}};\ -1-\sqrt{11+4\sqrt{3}}$
63	5
64	$\frac{1}{4}$
65	$\left[-\frac{7}{2};+\infty\right)$

ОТВЕТЫ К ЗАДАНИЯМ ГЛАВЫ 5

Номер задания	Ответ
1	4
2	1
3	0
4	1
5	1
6	1

Номер задания	Ответ
7	2
8	2
9	2
10	1
11	1
12	3
13	1,5
14	0
15	0,125
16	–1
17	3
18	3
19	2
20	1
21	4
22	$\arccos\frac{1}{4}$
23	$\operatorname{arctg}\left(-\frac{2}{3}\right)$
24	$-\frac{\pi}{2}$
25	$-\frac{\pi}{4}$
26	$\operatorname{arctg}\left(5-\sqrt{34}\right)$
27	$\frac{\pi}{2}+\pi n, \quad \pm\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$

Номер задания	Ответ
28	$\pi n,\ n \in Z$
29	$-\frac{\pi}{64}+\frac{\pi}{16}n,\ n \in Z$
30	$\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n \in Z$
31	a — любое иррациональное число
32	1
33	4
34	3
35	1
36	4
37	$\frac{\pi}{2}k,\ k \neq 4n+2,\quad k,\ n \in Z$
38	$\left((-1)^k \frac{\pi}{4}+\pi k; \frac{\pi}{2}+\pi n\right),\ k,\ n \in Z$
39	6
40	$\left(-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}k;\ 2\pi n;\ -23\right)\ (k,\ n \in Z)$
41	$\left(\frac{3\pi}{20}+\frac{\pi}{2}k+(-1)^k \frac{\pi}{20};\ \frac{3\pi}{20}-\frac{\pi}{2}k-(-1)^k \frac{\pi}{20}\right),\quad k \in Z$
42	$\left(\frac{1}{3}+k;\ \frac{1}{3}-k\right),\ k \in Z$
43	$\left(\frac{\pi}{4}+\pi k;\ \mathrm{arctg}3+\pi n;\ \mathrm{arctg}2-\pi(k+n)\right)$ $\left(-\frac{\pi}{4}+\pi k;\ -\mathrm{arctg}3+\pi n;\ -\mathrm{arctg}2-\pi(k+n-2)\right)$, $(k, n \in Z)$

Номер задания	Ответ
44	$\left((-1)^k \arcsin\left(a^2 \pm 2a\right)+\pi k;\ \pm\arccos\left(a^2 \pm 2a\right)+2\pi n\right)$, $k, n \in Z$ если $\lvert a\rvert \le \sqrt{2}-1$, причем знаки перед слагаемым 2а в $\arccos\left(a^2 \pm 2a\right)$ и в $\arcsin\left(a^2 \pm 2a\right)$ противоположны. При $\lvert a\rvert > \sqrt{2}-1$ решений нет
45	$\left(\mathrm{tg}\frac{\pi k}{7};\ \mathrm{tg}\frac{2\pi k}{7};\ \mathrm{tg}\frac{4\pi k}{7}\right) k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 6$
46	$\forall a \in (-2\pi;\ 0] \cup [2\pi;\ 4\pi]$

ОТВЕТЫ К ЗАДАНИЯМ ГЛАВЫ 6

Номер задания	Ответ
1	3 : 5
2	4 : 1
3	70^0
4	8
5	10
6	25
7	54
8	$\frac{5}{3}$
9	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
10	5

Номер задания	Ответ
11	$\frac{210\sqrt{3}}{143}$
12	$120\sqrt{3}$
13	$2\sqrt{26}$
14	2
15	20
16	1 : 2
17	$\frac{\pi}{2}$
18	$\frac{\sqrt{2}}{6}$
19	9
20	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$
21	$\frac{\sqrt{2}}{3}$
22	$\frac{\sqrt{26}}{2}$
23	$\frac{4}{55}\sqrt{770}$
24	$\frac{h^3 \sin\alpha}{\sin^2\beta}\sqrt{\cos^2\beta - \sin^2\alpha}$
25	$abc\sqrt{-\cos 2\varphi}$
26	$\frac{75}{4}\sqrt{3}$
27	$\frac{Q^2}{2a}\sin 2\beta$

Номер задания	Ответ
28	$\frac{a^2}{3}\left(\sqrt{15}+\sqrt{6}\right)$
29	$\frac{9}{4}$
30	$\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$
31	$\frac{\sqrt{39}}{4}a^2$
32	$\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$
33	$\frac{R^3\sqrt{6}}{4}$
34	$\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{15}{2}}$, $\operatorname{arctg}\sqrt{15}$.
35	10
36	$AK:CK=2:3$
37	$\frac{p^2(p+3q)}{q^2(q+3p)}$
38	$4:5$
39	$\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}\beta\right)$
40	$\frac{1}{4}a^3$
41	1260 дм^3
42	$1400\sqrt{3}$ см^3
43	$\frac{1}{27}$

Номер задания	Ответ
44	$V = \pi S\sqrt{2S\sin\alpha}$
45	5:16
46	$\frac{52}{81}\pi R^3$

Ответы тренировочным тестам

Часть 1

	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
B1	480	392	39
B2	2,75	2,5	540
B3	1	2	− 75
B4	− 3,84	− 5,76	3,75
B5	105000	61650	148200
B6	9	12	14
B7	10	2	2
B8	2	3	1
B9	2	3	2
B10	63	25	136
B11	3,5	6	52
B12	840	18	4

Часть 2

	Вариант 1
C1	$\left((-1)^n\frac{\pi}{3}+\pi n; 3\right), n\in\mathbb{Z}$
C2	$18:1:3$
C3	$(-3;\ -2]\cup[-1;\ 2]$
C4	2; 14
C5	$a>4{,}5$
C6	$(1;\ 2);\ (2;\ 1)$

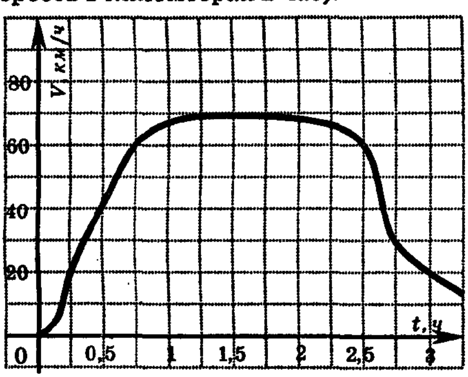
	Вариант 2
C1	$\left((-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n; 2\pi k\right), n\in\mathbb{Z}, k\in\mathbb{Z}$
C2	$2\arcsin\sqrt{\frac{11}{20}}$
C3	$[-2;\ 1]\cup[2;\ 3)$
C4	3; 9
C5	$a>3{,}2$
C6	46
	Вариант 3
C1	$(-6; \operatorname{arctg}3+\pi n), n\in\mathbb{Z}$
C2	4:1:4
C3	$[-5;\ -4)\cup[0;\ 5]$
C4	$3\sqrt{6}$ и $\frac{2\sqrt{6}}{3}$
C5	$(-6\pi-1;\ -4\pi-1)\cup(4\pi-1;\ 6\pi-1)$
C6	$(3; 3); (3; -3)$

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ВАРИАНТА 1

B1. В июне килограмм черешни стоит 130 рублей. Юлия купила 4 кг черешни. Сколько рублей сдачи получила она с 1000 рублей?

Решение.
Стоимость покупки $130 \cdot 4 = 520$ (руб.), сдача $1000 - 520 =$
$= 480$ (руб.).
Ответ: 480.

B2. Судно на подводных крыльях «Олимпия» может плыть со скоростью 70 км/ч. При скорости 20 км/ч корпус судна поднимается над поверхностью воды и оно движется, опираясь на подводные крылья. Определите по графику, сколько часов корабль плыл на подводных крыльях. (На оси абсцисс отмечено время движения в часах, на оси ординат — скорость в километрах в час).



Решение.
Со скоростью 20 км/ч судно плыло, начиная с момента времени $t = 0,25$ ч и заканчивая моментом времени $t = 3$ ч, то есть $3 - 0,25 = 2,75$ (ч).
Ответ: 2,75.

B3. Найдите корень уравнения $7^{3-x} = 49$.

Решение.

$7^{3-x}=49 \Leftrightarrow 7^{3-x}=7^2 \Leftrightarrow 3-x=2 \Leftrightarrow x=1.$

Ответ: 1.

B4. Найдите $4\sin 2\alpha$, если $\sin\alpha=0{,}6$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

Решение.

$\cos\alpha<0$ и $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=0{,}64.$

Поэтому $\cos\alpha=-0{,}8.$

Тогда $4\sin 2\alpha=8\sin\alpha\cos\alpha=-8\cdot 0{,}6\cdot 0{,}8=-3{,}84.$

Ответ: $-3{,}84$.

B5. Торговая фирма планирует приобрести 7500 л молока у одного из трех поставщиков. Цены и условия доставки приведены в таблице. Сколько рублей придется заплатить за самую дешевую покупку с доставкой?

Поставщик	Стоимость молока (руб. за л)	Стоимость доставки	Дополнительные условия
1	13	9000	
2	14	8000	При заказе на сумму больше 100000 руб. доставка бесплатно
3	15	8000	При заказе на сумму больше 110000 руб. доставка бесплатно

Решение.

Стоимость покупки с доставкой у первого поставщика $7500\cdot 13+9000=106500$ (руб.).

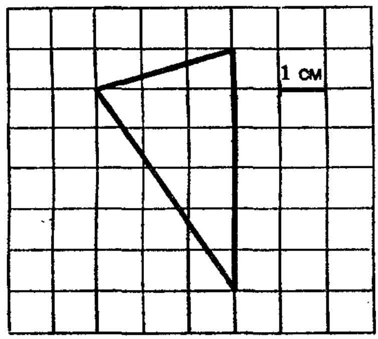
Стоимость покупки у второго поставщика $7500\cdot 14 = 105000$ (руб.), при этом доставка бесплатная.

Стоимость покупки у третьего поставщика $7500\cdot 15 = 112500$ (руб.), при этом доставка бесплатная.

Самая дешевая покупка с доставкой у второго поставщика.

Ответ: 105000.

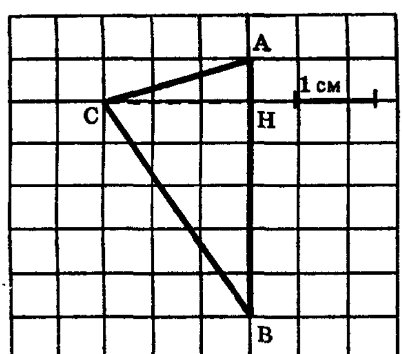
В6. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображен треугольник (см. рис.). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.



Решение.

Введем обозначения (см. рисунок).

В треугольнике ABC проведем высоту CH. Тогда площадь треугольника ABC равна $S=\frac{1}{2}AB\cdot CH=\frac{6\cdot 3}{2}=9$ (см^2).



Ответ: 9.

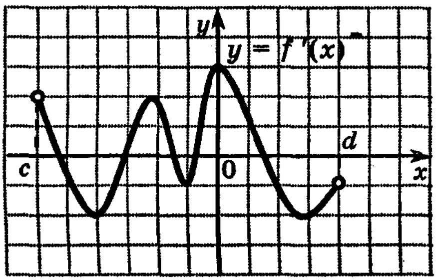
В7. Найдите значение выражения $\frac{70}{4^{\log_4 7}}$.

Решение.

Воспользуемся основным логарифмическим тождеством: $4^{\log_4 7}=7$. Тогда $\frac{70}{4^{\log_4 7}}=\frac{70}{7}=10$.

Ответ: 10.

B8. Функция $y=f(x)$ определена на промежутке $(c;\ d)$. На рисунке изображен график ее производной. Найдите число точек минимума функции $y=f(x)$ на промежутке $(c;\ d)$.



Решение.
Достаточное условие точки минимума функции — смена знака производной с «минуса» на «плюс», то есть нас интересует количество точек на оси абсцисс, в которых график пересекает ось абсцисс слева снизу вправо вверх. На рисунке это точки A и B.
Ответ: 2.

B9. Камень столкнули с уступа и он падает в пропасть. До падения камня на дно пропасти расстояние, на котором он находится от дна пропасти, зависит от времени: $h(t)=146+5t-9t^2$ (h — расстояние от дна пропасти в метрах, t — время в секундах, прошедшее с начала падения). Сколько секунд камень будет находиться на расстоянии не менее 120 м от дна пропасти?

Решение.
Решим неравенство:

$146+5t-9t^2 \geq 120,\ 9t^2-5t-26 \leq 0.$

$D=25+26\cdot 36=961=31^2.$

$t=\frac{5\pm 31}{18},\quad t=-\frac{13}{9}$ или $t=2.$

Таким образом, на расстоянии от дна пропасти не менее 120 м камень находится от начала падения до момента $t=2$, то есть первые 2 секунды падения.

Ответ: 2.

B10. Объем конуса 14 м^3. У второго конуса высота в 2 раза меньше, а радиус основания в 3 раза больше, чем у первого. Найдите объем второго конуса.

Решение.

Пусть высота первого конуса равна h, а радиус его основания r. Тогда объем первого конуса равен $V_1=\frac{1}{3}\pi r^2 h$, что по условию задачи составляет 14 м^3, то есть $\frac{1}{3}\pi r^2 h=14$.

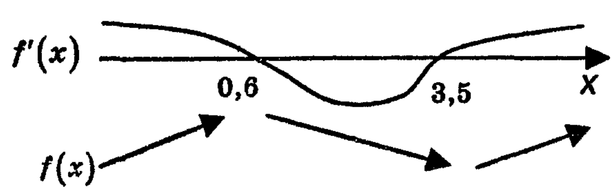
У второго конуса высота равна $\frac{1}{2}h$, радиус основания $3r$, объем $V_2=\frac{1}{3}\pi(3r)^2\cdot\frac{1}{2}h=\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{9}{2}V_1=\frac{9}{2}\cdot 14=63$ (м^3).

Ответ: 63.

B11. Найдите точку минимума функции $f(x)=\frac{10}{3}x^3-\frac{41}{2}x^2+21x-17$.

Решение.

Функция определена на множестве действительных чисел. Найдем ее производную. Производная $f'(x)=10x^2-41x+21=(5x-3)(2x-7)$ определена также на множестве действительных чисел. Определим промежутки знакопостоянства производной $f'(x)$ и промежутки монотонности функции $f(x)$.



Точка $x=3{,}5$ принадлежит области определения функции $f(x)$, слева от нее функция $f(x)$ убывает, а справа возрастает. Других таких точек нет. Следовательно, $x=3{,}5$ — единственная точка минимума функции $f(x)$.

Ответ: 3,5.

B12. Самолет летит из одного города в другой со средней скоростью 780 км/ч, а обратно — со средней скоростью 910 км/ч. Найдите среднюю скорость движения самолета на пути из одного города до другого и обратно.

Решение.

Пусть расстояние между городами равно S. Тогда время первого полета $\frac{S}{780}$ часов, время второго полета $\frac{S}{910}$ часов. При движении «туда–обратно» расстояние равно 2S км, время равно $\frac{S}{780}+\frac{S}{910}$ часов, поэтому средняя скорость равна

$$v_{cp}=\frac{2S}{\frac{S}{780}+\frac{S}{910}}=\frac{2S}{\frac{S}{130\cdot 6}+\frac{S}{130\cdot 7}}=\frac{2S\cdot 130\cdot 6\cdot 7}{13S}=840 \text{ (км/ч)}.$$

Ответ: 840.

C1. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2\sqrt{3}\sin x=y \\ y^2+2y+\sqrt{y^2+2y-6}=18. \end{cases}$

Решение.

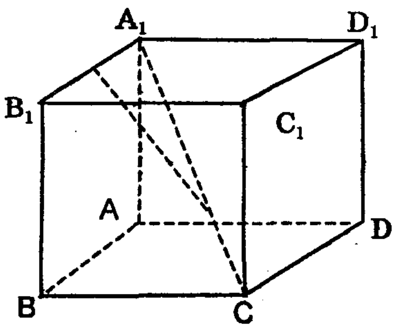
1. Решим первое уравнение системы $y^2+2y+\sqrt{y^2+2y-6}=18$. Сделаем замену $\sqrt{y^2+2y-6}=t$, тогда уравнение равносильно системе $\begin{cases} t^2+t-12=0 \\ t\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow t=3.$

Решим уравнение $\sqrt{y^2+2y-6}=3$: $y=-5$ или $y=3$.

2. Решим второе уравнение системы. Оно принимает вид $\sin x=-\frac{5}{2\sqrt{3}}<-1$ (решения нет) или $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $x=(-1)^n\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$

Ответ: $\left(\left(-1\right)^n\frac{\pi}{3}+\pi n;\ 3\right), n\in\mathbb{Z}.$

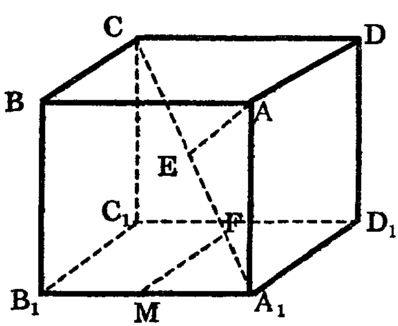
C2. Дана правильная четырехугольная призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$, высота которой в три раза больше стороны основания. К диагонали A_1C из вершины A и середины ребра A_1B_1 проведены перпендикуляры. В каком отношении (считая от вершины A_1) основания этих перпендикуляров делят диагональ A_1C?



Решение.

Пусть E и F — основания перпендикуляров, проведенных из вершины A и середины M ребра AB на A_1C.

Пусть ребро основания равно 1, тогда высота призмы равна 3 и $A_1C=\sqrt{11}$.



Рассмотрим прямоугольный треугольник A_1AC, в котором AE высота, проведенная к гипотенузе. Из равенства $AA_1^2 = A_1E \cdot A_1C$ найдем $A_1E = \frac{AA_1^2}{A_1C} = \frac{9}{\sqrt{11}} = \frac{9}{11}\sqrt{11} = \frac{9}{11}A_1C.$

Из треугольника A_1MC найдем CF. $A_1M = \frac{\sqrt{37}}{2}$, $MC = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Пусть $CF = x$, тогда $A_1F = \sqrt{11} - x$. Из прямоугольных треугольников MFA_1 и MFC выразим MF^2 через x и, приравняв полученные выражения, найдем CF: $MF^2 = MC^2 - CF^2 = \frac{5}{4} - x^2$,

$$MF^2 = MA_1^2 - A_1F^2 = \frac{37}{4} - \left(\sqrt{11} - x\right)^2 = \frac{37}{4} - 11 + 2x\sqrt{11} - x^2,$$

$$\frac{5}{4} - x^2 = \frac{37}{4} - 11 + 2x\sqrt{11} - x^2,\ 2x\sqrt{11} = 3,\ x = \frac{3}{2\sqrt{11}} = \frac{3}{22}\sqrt{11}.$$

Тогда $CF = \frac{3}{22}A_1C.$

Таким образом, диагональ разделилась на три части в отношении $18:1:3$, считая от точки A_1.

Ответ: $18:1:3$.

С3. Решите неравенство $\frac{\sqrt{8-x^3} - 4 + x}{x+3} \le x.$

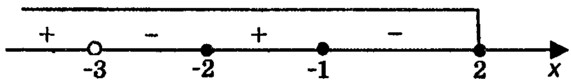
Решение.

$\frac{\sqrt{8-x^3} - 4 + x}{x+3} \le x \Leftrightarrow \frac{\sqrt{8-x^3} - \left(x^2 + 2x + 4\right)}{x+3} \le 0.$ Так как $\sqrt{x^2 + 2x + 4} > 0$ при любом x, данное неравенство равносильно неравенству $\frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{x^2 + 2x + 4}}{x+3} \le 0.$ Умножим обе его части на положительное при всех значениях x выражение $\sqrt{2-x} + \sqrt{x^2 + 2x + 4}$ и получим:

$$\frac{\left(\sqrt{2-x} - \sqrt{x^2 + 2x + 4}\right)\left(\sqrt{2-x} + \sqrt{x^2 + 2x + 4}\right)}{x+3} \le 0,$$

$$\frac{2-x-\left(x^2+2x+4\right)}{x+3}\le 0,\ \frac{-x^2-3x-2}{x+3}\le 0,\ \frac{-(x+1)(x+2)}{x+3}\le 0.$$

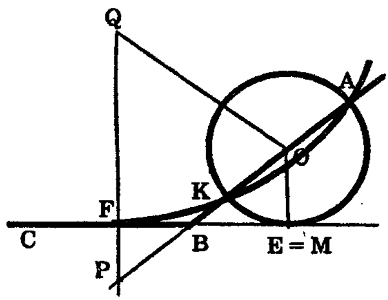
Решим неравенство методом интервалов при $x\le 2$.



Ответ: $(-3;-2]\cup[-1;2]$.

С4. На стороне BA угла ABC, равного 150°, взята такая точка K, что $AK=4$ и $BK=2$. Найдите радиус окружности, проходящей через точки A, K и касающейся прямой BC.

Решение.



Имеем два случая.

1. Точка касания окружностью прямой BC (точка E) лежит на продолжении стороны BC за точку B. Тогда по свойству касательной

$BE^2=BK\cdot BA=2\cdot 6=12,$

$BE=2\sqrt{3}.$

Опустим из точки O, середины хорды AK, перпендикуляр OM на BC. В треугольнике OBM $\angle OBM=30^\circ$ и $BM=\frac{BO\sqrt{3}}{2}=\frac{(2+2)\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$. Поэтому точки M и E совпадают. Таким образом, O — центр окружности и $R=OE=\frac{1}{2}OB=2.$

2. Точка касания окружностью прямой BC (точка F) лежит на луче BC. Q — центр этой окружности, QF ее радиус. $QO \perp AB$, так как точка O — середина хорды этой окружности. Пусть P — точка пересечения прямых AB и QF. По свойству касательной $BF^2 = BK \cdot BA = BE^2$, $BF = BE = 2\sqrt{3}$, $\angle FBP = \angle ABE = 30°$, $FP = OE = 2$. В треугольнике OPQ $PO = 2OB = 8$, а $\angle QPO = 60°$, тогда $PQ = 2PO = 16$. Радиус окружности равен $PQ - PF = 16 - 2 = 14$.

Ответ: 2; 14.

С5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $5x + |4x - a| + |2x - 1| > 5$ выполняется для любого x.

Решение.

Рассмотрим функцию $f(x) = 5x + |4x - a| + |2x - 1| - 5$.

Если $x \geq \frac{1}{2}$ и $x \geq \frac{a}{4}$, функция $f(x) = 11x - a - 6$ возрастает.

Если $x \leq \frac{1}{2}$ и $x \leq \frac{a}{4}$, функция $f(x) = -x + a - 4$ убывает.

На отрезке с концами в точках $x = \frac{1}{2}$ и $x = \frac{a}{4}$ функция $f(x) = kx + b$ монотонна.

Следовательно, функция $f(x)$ принимает наименьшее значение в точке $x = \frac{1}{2}$ или в точке $x = \frac{a}{4}$.

Неравенство $5x + |4x - a| + |2x - 1| > 5$ выполняется для любого x, если наименьшее значение функции $f(x) = 5x + |4x - a| + |2x - 1| - 5$ положительно, то есть

$$\begin{cases} f\left(\frac{1}{2}\right) > 0 \\ f\left(\frac{a}{4}\right) > 0 \end{cases} \quad (*).$$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2} + |2 - a| - 5 > 0$, $|a - 2| > \frac{5}{2}$, $a < -0{,}5$ или $a > 4{,}5$.

$$f\left(\frac{a}{4}\right)=\frac{5a}{4}+\left|\frac{a}{2}-1\right|-5>0.$$

Если $a\geq 2$, то $f\left(\frac{a}{4}\right)=\frac{7a}{4}-6>0$, то есть $\begin{cases}a\geq 2\\ a>\frac{24}{7}\end{cases}$, $a>3\frac{3}{7}$.

Если $a<2$, то $f\left(\frac{a}{4}\right)=\frac{3a}{4}-4>0$, то есть $\begin{cases}a<2\\ a>\frac{16}{3}\end{cases}$.

Таких значений a нет.

Итак, система (*) равносильна следующей системе:

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}a<-0{,}5\\ a>4{,}5\end{array}\right.\\ a>3\frac{3}{7}\end{cases},\qquad a>4{,}5.$$

Ответ: $a>4{,}5$.

С6. Решите в целых числах уравнение $\sqrt{x-\frac{1}{5}}+\sqrt{y-\frac{1}{5}}=\sqrt{5}$.

Решение.

$$\sqrt{x-\frac{1}{5}}+\sqrt{y-\frac{1}{5}}=\sqrt{5}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{5x-1}+\sqrt{5y-1}}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{5x-1}+\sqrt{5y-1}=5\Leftrightarrow\sqrt{5x-1}=5-\sqrt{5y-1},\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{5y-1}<5\Leftrightarrow\frac{1}{5}\leq y\leq\frac{26}{5}.$$

Так как y число целое, то $y=1$ или $y=2$ или $y=3$ или $y=4$ или $y=5$. Проверка показывает, что $y=1$ (при этом $x=2$) или $y=2$ (при этом $x=1$). При остальных значениях y значения x иррациональные.

Ответ: $(1;2);(2;1)$.

Глазков Юрий Александрович
Корешкова Татьяна Александровна
Мирошин Владимир Васильевич
Шевелева Наталья Васильевна

МАТЕМАТИКА
ЕГЭ
СБОРНИК ЗАДАНИЙ

Издательство ***«ЭКЗАМЕН»***

Гигиенический сертификат
№ 77.99.60.953.Д.000454.01.09 от 27.01.2009 г.

Выпускающий редактор *Л.Д. Лаппо*
Редактор *И.М. Бокова*
Корректор *Л.А. Громова*
Дизайн обложки *И.Р. Захаркина*
Компьютерная верстка *М.В. Демина, М.В. Derendяева*

105066, Москва, ул. Нижняя Красносельская, д. 35, стр. 1.
www.examen.biz
E-mail: по общим вопросам: info@cxamen.biz;
по вопросам реализации: sale@examen.biz
тел./факс 641-00-30 (многоканальный)

Общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93, том 2; 953005 — книги, брошюры, литература учебная

Текст отпечатан с диапозитивов
в ОАО «Владимирская книжная типография»
600000, г. Владимир, Октябрьский проспект, д. 7

Качество печати соответствует
качеству предоставленных диапозитивов

По вопросам реализации обращаться по тел.:
641-00-30 (многоканальный).